

Name (deutlich lesbar!):

Matrikelnummer (deutlich lesbar!):

--	--	--	--	--	--	--	--

Studienrichtung: Physik / technische Mathematik, Lehramt, oder andere.

- Es sind keine anderen Hilfsmittel als ein Stift zugelassen, insbesondere keine Unterlagen und keine elektronischen Geräte. Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus.
- Aufgaben, die mit **P** gekennzeichnet sind, sind nur von Studierenden der Physik zu beantworten. Aufgaben, die mit **M** gekennzeichnet sind, sind nur von den übrigen Studierenden zu beantworten. Aufgaben, die **nicht** gekennzeichnet sind, sind von allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern zu beantworten.
- Die Antworten zu Aufgabe 1 sind auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Notieren Sie die Antworten für die weiteren Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten weissen Papier. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und legen Sie bei der Abgabe die Blätter in der Reihenfolge der Aufgaben zusammen, mit dem Aufgabenblatt als Deckblatt. Die abgegebenen Blätter werden oben links zusammengetackert. Halten Sie deshalb beim Schreiben genügend Abstand zu dieser Ecke.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Sie können die Teilnahme an der Klausur jederzeit ohne Abgabe einer Lösung beenden. Ein solcher Abbruch wird nicht als Fehlversuch gewertet.

Aufgabe 1. Wahr oder falsch?

	wahr	falsch
Die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Für lineare Abbildungen $h: V \rightarrow V$ gilt immer $\ker h \perp \operatorname{im} h$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Für lineare Abbildungen $h: V \rightarrow V$ gilt niemals $\ker h \perp \operatorname{im} h$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
\perp ist eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{R}^n (bzgl. des Standard-SKP)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Für zwei Eigenräume E_u, E_v ($u \neq v$) einer Matrix A gilt immer $E_u \cap E_v = \{0\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Jede positiv definite Matrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist invertierbar	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Jeder endlichdimensionale Skalarproduktraum hat eine ONB	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$X \mid 5 + 3X - 7X^2 + 8X^3 - 4X^4 - X^5 + 3X^6$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat mindestens einen Eigenwert in \mathbb{R}	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ hat mindestens einen Singulärwert in \mathbb{R}	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann orthogonal, wenn $A^\top A = I_n$ gilt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Für jede Projektion $h: V \rightarrow V$ gilt $V = \ker h \oplus \operatorname{im} h$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
M $\log(n) = O(n)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
M Das Produkt zweier Töplitz-Matrizen ist eine Töplitz-Matrix	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
M Für jede primitive n -te Einheitswurzel ω gilt $\operatorname{DFT}_n^{(\omega)} \operatorname{DFT}_n^{(1/\omega)} = nI_n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Lösung. falsch-falsch-falsch, falsch-wahr-wahr, wahr-falsch-falsch, wahr-wahr-wahr, wahr-falsch-wahr.

Aufgabe 2. Der Raum \mathbb{R}^4 sei ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt, und es sei

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4.$$

- a) Geben Sie eine Basis $\{b_1, b_2\}$ für das orthogonale Komplement U^\perp von U an.
 b) Bestimmen Sie eine ONB $\{b_3, b_4\}$ von U .

- c) Berechnen Sie die orthogonale Projektion \bar{x} des Punkts $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf U .

- d) Wie lautet die Abbildungsmatrix der Orthogonalprojektion auf U bezüglich der geordneten Basis (b_1, b_2, b_3, b_4) , wobei b_1, b_2 die Basisvektoren von U^\perp aus Teil a) und b_3, b_4 die Basisvektoren von U aus Teil b) sind?

Lösung.

- a) Sind u_1, u_2 die beiden gegebenen Basisvektoren von U , so ist U^\perp die Menge aller $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ mit $\langle x|u_1 \rangle = \langle x|u_2 \rangle = 0$. Diese findet man durch Lösen eines linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow -3 \\ \leftarrow + \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ | -1/3 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow -1 \end{array} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & -1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $U^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

- b) Gram-Schmidt. Mit u_1, u_2 sind wieder die beiden gegebenen Basisvektoren von U bezeichnet.

$$b_3 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v = u_2 - \langle b_3|u_2 \rangle b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_4 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \langle x|b_3 \rangle b_3 + \langle x|b_4 \rangle b_4 \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2-1+2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{(10+1+0-2)}{36}}_{=1/4} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 3. Sei $h: \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}[X]$, $p \mapsto p(1-X)$, d.h. es gelte

$$h(p_0 + p_1X + \dots + p_nX^n) = p_0 + p_1(1-X) + \dots + p_n(1-X)^n.$$

- Zu $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{Q}[X]_{\leq n} \subseteq \mathbb{Q}[X]$ den Unterraum aller Polynome vom Grad $\leq n$. Zeigen Sie, dass diese Unterräume h -invariant sind.
- Zeigen Sie, dass es sich auch bei den Räumen $U = \langle 1, (2X-1)^2, (2X-1)^4, \dots \rangle \subseteq \mathbb{Q}[X]$ und $W = \langle 2X-1, (2X-1)^3, (2X-1)^5, \dots \rangle \subseteq \mathbb{Q}[X]$ um h -invariante Unterräume handelt.
- Bestimmen Sie die Eigenwerte von h .

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $h^{-1} = h$.

Lösung.

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\deg(1-X)^n = \deg X^n = n$. Daraus folgt $\deg h(p) \leq \deg p$ für alle $p \in \mathbb{Q}[X]$, und daraus die Behauptung.
- Es gilt $h(2X-1) = 2(1-X) - 1 = -(2X-1)$, und damit $h((2X-1)^n) = (-1)^n(2X-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Linearität von h folgt $h(p_0 + p_2(2X-1)^2 + \dots + p_{2d}(2X-1)^{2d}) = p_0 + p_2(2X-1)^2 + \dots + p_{2d}(2X-1)^{2d}$ bzw. $h(p_1(2X-1) + p_3(2X-1)^3 + \dots + p_{2d+1}(2X-1)^{2d+1}) = -p_1(2X-1) - p_3(2X-1)^3 - \dots - p_{2d+1}(2X-1)^{2d+1}$. Daraus folgt die Behauptung.
- Es gilt $X = 1 - (1-X)$, daher $X^n = (1 - (1-X))^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und daher wegen Linearität $h(h(p)) = p$ für alle $p \in \mathbb{Q}[X]$. Damit ist der Hinweis gezeigt.

Die Elemente von U aus dem vorigen Punkt sind Eigenvektoren zum Eigenwert 1, und jene von W sind Eigenvektoren zum Eigenwert -1 . Damit sind $+1$ und -1 Eigenwerte. Wir zeigen, dass es keine weiteren Eigenwerte gibt.

Ist $\lambda \in \mathbb{Q}$ ein Eigenwert von h und $p \neq 0$ ein zugehöriger Eigenvektor, so gilt $h(p) = \lambda p$ und $p = h(h(p)) = \lambda^2 p$. Wegen $p \neq 0$ folgt daraus $1 = \lambda^2$. Daraus folgt, die einzigen möglichen Eigenwerte -1 und 1 sind.

Aufgabe 4. P Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $A^m = 0$ ist. Zeigen Sie:

- a) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist genau dann nilpotent, wenn 0 der einzige Eigenwert von A ist.
Hinweis: Betrachten Sie ein geeignetes annihilierendes Polynom von A .
- b) Jede Matrix $A = ((a_{i,j}))_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $a_{i,j} = 0$ für alle $1 \leq j \leq i \leq n$ ist nilpotent.
- c) Wenn $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nilpotent ist, dann ist für jedes invertierbare $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ auch $B^{-1}AB$ nilpotent.
- d) Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ lässt sich schreiben als $A = A_1 + A_2$ für eine diagonalisierbare Matrix $A_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und eine nilpotente Matrix $A_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$.
Hinweis: Betrachten Sie die Jordan-Normalform von A und verwenden Sie die Teile b) und c).

Lösung.

- a) „ \Rightarrow “ A ist nilpotent. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = 0$. Dann ist X^m ein annihilierendes Polynom von A . Da das charakteristische Polynom von A ein Teiler von X^m sein muss, kann es nur X^n lauten. Dieses Polynom hat nur 0 als Nullstelle. Da jeder Eigenwert von A Nullstelle des charakteristischen Polynoms sein muss, folgt die Behauptung.
„ \Leftarrow “ A hat nur 0 als Eigenwert. Betrachte das charakteristische Polynom χ von A . Da \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen ist, kann es keine anderen Teiler als X haben. Es gilt also $\chi = X^n$. Wegen des Satzes von Cayley-Hamilton folgt $A^n = 0$. Also ist A nilpotent.
- b) Es handelt sich bei A um eine Dreiecksmatrix, auf deren Diagonale nur Nullen stehen. Deshalb gilt $\det(A - XI_n) = X^n$, und daraus folgt schon die Behauptung.
- c) Sei B eine invertierbare Matrix. Dann gilt $(B^{-1}AB)^m = B^{-1}A^mB$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Daraus folgt die Behauptung.
- d) Sei $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar, so dass $J = B^{-1}AB$ die Jordan-Normalform von A ist. Weil die Matrix J eine Jordan-Normalform ist, lässt sie sich schreiben als $J = D + N$ für eine Diagonalmatrix D und eine Matrix N wie in b). Als Diagonalmatrix ist D offensichtlich diagonalisierbar, und nach b) ist N nilpotent. Wegen c) folgt, dass $A = B^{-1}(D + N)B = B^{-1}DB + B^{-1}NB$ eine Darstellung der gewünschten Form ist.

Aufgabe 5. M

- a) Warum ist $\varphi: \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_{25}, \varphi([u]_{\sim_5}) := [u]_{\sim_{25}}$ keine gültige Definition für einen \mathbb{Z} -Modul-Homomorphismus?
- b) Geben Sie einen Untermodul M von \mathbb{Z}^4 an, so dass $\mathbb{Z}^4/M \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_6$ als \mathbb{Z} -Moduln.
- c) Sei R ein Integritätsbereich und M_1, M_2 seien R -Moduln. Weiter sei $h: M_1 \rightarrow M_2$ ein Modul-Homomorphismus. Zeigen Sie: Wenn m ein Torsionselement von M_1 ist, dann ist $h(m)$ ein Torsionselement von M_2 .
- d) Berechnen Sie eine Basis des Schnitts der beiden \mathbb{Z} -Moduln $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ und $\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$.

Lösung.

a) Die Definition ist nicht repräsentantenunabhängig. Zum Beispiel gilt $[1]_{\sim_5} = [6]_{\sim_5}$, aber $[1]_{\sim_{25}} \neq [6]_{\sim_{25}}$.

b) $M = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$

c) Ist m ein Torsionselement von M_1 , so existiert ein $r \in R$ mit $rm = 0$. Dann gilt $rh(m) = h(rm) = h(0) = 0$, weil h ein Homomorphismus ist. Daraus folgt die Behauptung.

d) Mit der Hermite-Normalform:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \xleftrightarrow{\begin{matrix} \left[\begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right]^{-1} \\ \left[\begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right]^{-3} \\ \left[\begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right] \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\begin{matrix} |(-1)| \left[\begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right]^{-2} \\ \left[\begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right] \\ \left[\begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right] \end{matrix}} \\
 & \xleftrightarrow{\begin{matrix} \left[\begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right]^{-2} \\ \left[\begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right] \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \xleftrightarrow{\begin{matrix} \left[\begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right]^{-3} \\ \left[\begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right] \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \xleftrightarrow{\begin{matrix} \left[\begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right]^{-3} \\ \left[\begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right] \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die beiden Basisvektoren $1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$.