

Übungsblatt 11

Besprechung am 06.06.2016

Aufgabe 1 Es sei M der durch $(1, 0, -1)$, $(4, 3, -1)$, $(0, 9, 3)$ und $(3, 12, 3)$ erzeugte Untermodul von \mathbb{Z}^3 .

- Warum ist M frei?
- Bestimmen Sie eine Basis von M .
- Geben Sie einen Isomorphismus von $\mathbb{Z}^k \rightarrow M$ an, für ein passendes $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 Sei K der durch $(5, -1, -2)$, $(-1, 5, -2)$, $(-2, -2, 2)$ erzeugte Untermodul von \mathbb{Z}^3 .

- Bestimmen Sie die Smith-Normalform von

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Stellen Sie \mathbb{Z}^3/K als direkte Summe eines freien Moduls und eines Torsionsmoduls dar.

Aufgabe 3 [Schriftlich für Studierende, deren Matrikelnummer bei Division durch 3 den Rest 0 ergibt] Sei A der Untermodul von \mathbb{Z}^3 , der von $((2, 12, 4), (8, -6, 3), (4, 15, 5), (10, 6, 7))$ erzeugt wird, und B der Untermodul, der von $((5, 3, 3), (3, -3, 4), (5, 3, 5))$ erzeugt wird. Berechnen Sie Basen von A , B , $A + B$ und $A \cap B$.

Aufgabe 4

- Betrachten Sie das durch $((5, 3), (7, 5))$ erzeugte Gitter. Wie groß ist der davon aufgespannte Spat? Finden Sie für dieses Gitter eine Basis bestehend aus möglichst kurzen Vektoren. Wie groß ist der durch diese aufgespannte Spat? (Dieses Beispiel ist geeignet, um das Gitter auf kariertem Papier zu zeichnen, sodass die Lösung einfach abgelesen werden kann.)
- Dasselbe für das von $((15, 19, 39), (9, 12, 23), (1, 1, 1))$ erzeugte Gitter (ohne Zeichnen).

Beide Beispiele sollten sowohl händisch als auch mit einem geeigneten Programm gelöst werden.

Aufgabe 5

- Welchem Verhältnis ganzer Zahlen entspricht 0.32075471698 ?
- Die Lösung einer kubischen Gleichung hat den numerischen Näherungswert 0.73727772 . Wie könnte die Gleichung lauten?

Für diese Beispiele sollten Sie passende Software verwenden.