Vorlesungsklausur für den 1. Februar 2000
VL Endliche Geometrien

1. (Elementare Geometrie in der Ebene) Geben Sie zwei Beweise des Satzes:

   "In einem Dreieck schneiden sich die Höhen in einem Punkt".

   (z.B. einen durch Einführung von Koordinaten, einen zweiten mit einem alten italienischen Satz. Beschränken Sie sich auf spitzwinkelige Dreiecke.)

2. (Automatisches Beweisen) Beim automatischen Beweisen von geometrischen Sätzen mit der Gröbnerbasenmethode führt man die Gültigkeit einer Aussage auf die Lösbarkeit eines (oder mehrerer) Gleichungssysteme zurück. Seien $f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s, h$ Polynome in $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_k]$. Wie führen Sie die folgenden Aussagen auf die Lösbarkeit von Gleichungssystemen zurück? Geben Sie jeweils die Gleichungssysteme an!

   (a) Für alle $x_1, \ldots, x_k$ gilt:

   $$\left.\begin{array}{c} f_1(x_1,\ldots,x_k) = 0 \ \wedge \\ \vdots \\ f_r(x_1,\ldots,x_k) = 0 \ \wedge \\ g_1(x_1,\ldots,x_k) \neq 0 \ \wedge \\ \vdots \\ g_s(x_1,\ldots,x_k) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h(x_1,\ldots,x_k) = 0.$$

   (b) Für alle $x_1, \ldots, x_k$ gilt:

   $$\left.\begin{array}{c} f_1(x_1,\ldots,x_k) = 0 \ \wedge \\ \vdots \\ f_r(x_1,\ldots,x_k) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} g_1(x_1,\ldots,x_k) \neq 0 \ \wedge \\ \vdots \\ g_s(x_1,\ldots,x_k) \neq 0 \end{array}\right.$$

   (c) Für alle $x_1, \ldots, x_k$ gilt:

   $$f_1(x_1,\ldots,x_k) = 0 \Rightarrow g_1(x_1,\ldots,x_k) \neq 0.$$

   (d) Für alle $x_1, \ldots, x_k$ gilt:

   $$f_1(x_1,\ldots,x_k) \neq 0 \Rightarrow g_1(x_1,\ldots,x_k) \neq 0.$$

Geben Sie in den Beispielen (c) und (d) einen Beweis für die Äquivalenz der Implikation mit der Lösbarkeit des Gleichungssystems.

3. (Kollineationen)

   (a) Geben Sie in der projektiven Ebene $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ eine Homologie α und eine Elation β mit $\alpha \neq \mathrm{id}$ und $\beta \neq \mathrm{id}$ an. Bestimmen Sie jeweils Achse und Zentrum!

   (b) Wieviele Kollineationen besitzt die projektive Ebene $\mathcal{P}_2(GF(4))$?

   (c) Bestimmen Sie alle zentralen Kollineationen der projektiven Ebene der Ordnung 2 mit Zentrum $(1:0:0)$ und Achse $\{(x:y:z) \mid x=0\}$.

4. (Existenz projektiver Ebenen) Für welche n mit $2 \leq n \leq 20$ wissen Sie, ob es eine projektive Ebene der Ordnung n gibt? Geben Sie die Resultate an, die die Existenz (oder Nichtexistenz) der projektiven Ebene garantieren.

5. (Koordinatisierung) Sei $\mathcal{E}$ eine $(u,[o,v])$-transitive projektive Ebene. Zeigen Sie, dass der planare ternäre Ring (T,t), der $\mathcal{E}$ koordinatisiert, linear ist. (Dabei ist o der Nullpunkt, u der Punkt in x-Richtung, v der Punkt in y-Richtung.) (Skizze: $x=3$, $a=0.5$, $b=2$, Einheit = 2cm)

6. Sei O eine Teilmenge der Punkte einer projektiven Ebene $\mathcal{P}$, die keine drei kollinearen Punkte enthält. Sei n die Ordnung der projektiven Ebene. Zeigen Sie:

   (a) O hat höchstens $n+2$ Punkte.

   (b) Wenn n ungerade ist, hat O höchstens $n+1$ Punkte.

   (c) Es gibt ein gerades n, sodass O auch $n+2$ Punkte haben kann.