Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 · Winter 2016/17 · **Mini-Test 9** 05.12.2016

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!): | | | | | | |

Aufgabe 1 Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{Q}^4$, die die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\\3\end{pmatrix}$ enthält.

Lösung.

$$\begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&2&2&1\\0&0&3&3\end{pmatrix}\begin{array}{l}-1\\+\\ \end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&0&1&-1\\0&0&3&3\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\-3\\+\end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&4\end{pmatrix}.$$

Diese Matrix lässt sich z.B. mit dem Einheitsvektor $e_2 \in \mathbb{Q}^4$ zu einer 4×4-Matrix vom Rang 4 auffüllen. Daraus folgt, dass

$$\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\}$$

eine Basis von $\mathbb{Q}^4$ mit den gewünschten Vektoren ist.

Aufgabe 2 Sei $V = \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ der Vektorraum aller Funktionen $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Zeigen oder widerlegen Sie: Die Menge $U = \{\, f \in V : f(1) = 0 \,\}$ ist ein Unterraum von V.

Lösung. Stimmt:

(a) $U \neq \emptyset$ weil die Nullfunktion in U liegt.

(b) Sind $f, g \in U$, so gilt $f(1) = g(1) = 0$, und deshalb gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ auch $(\alpha f + \beta g)(1) = \alpha f(1) + \beta g(1) = 0$, also $\alpha f + \beta g \in U$.