Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 · Winter 2016/17 · **Mini-Test 7** 21.11.2016

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!):

Aufgabe 1 Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Mit $(A|B) \in \mathbb{K}^{n\times 2m}$ und $\binom{A}{B} \in \mathbb{K}^{2n\times m}$ sind die Blockmatrizen gemeint, die entstehen, wenn man A und B nebeneinander bzw. untereinander anordnet.

1. $\operatorname{Rang}\binom{A}{B} \leq \operatorname{Rang}(A) + \operatorname{Rang}(B)$. (*Hinweis:* Betrachten Sie Treppenformen von A und B.)
2. $\operatorname{Rang}(A|B) \leq \operatorname{Rang}(A) + \operatorname{Rang}(B)$. (*Hinweis:* Verwenden Sie Teil 1.)

Lösung.

1. Wenn T und S Treppenformen von A bzw. B sind, dann gilt $\binom{A}{B} \leftrightarrow \binom{T}{S}$. Die Matrix $\binom{T}{S}$ hat $\operatorname{Rang}(A) + \operatorname{Rang}(B)$ viele Nicht-Null-Zeilen, ist aber möglicherweise selbst noch keine Treppenform. Bei der weiteren Berechnung einer Treppenform von $\binom{T}{S}$ können einige dieser Nicht-Null-Zeilen noch zu Null-Zeilen werden, aber es kann keine schon vorhandene Null-Zeile mehr zu einer Nicht-Null-Zeile werden. Daraus folgt die Behauptung.

2. $\operatorname{Rang}(A|B) = \operatorname{Rang}(A|B)^\top = \operatorname{Rang}\binom{A^\top}{B^\top} \overset{\text{Teil 1}}{\leq} \operatorname{Rang}(A^\top) + \operatorname{Rang}(B^\top) = \operatorname{Rang}(A) + \operatorname{Rang}(B)$.