Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 · Winter 2016/17 · **Mini-Test 4** 31.10.2016

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!): | | | | | | | |

Aufgabe 1 Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $g \in G$ ein fixes Element. Zeigen Sie, dass die Funktion $f: G \to G$, $f(x) = g \circ x$ bijektiv ist.

Lösung. Da G eine Gruppe ist, existiert ein Element $g^{-1} \in G$ mit $g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = 1$, wobei 1 das Neutralelement von G ist. Die Funktion $f^{-1}: G \to G$, $f^{-1}(x) = g^{-1} \circ x$ ist eine Umkehrfunktion von f, denn für alle $x \in G$ gilt $f^{-1}(f(x)) = g^{-1} \circ (g \circ x) = (g^{-1} \circ g) \circ x = 1 \circ x = x$ und $f(f^{-1}(x)) = g \circ (g^{-1} \circ x) = (g \circ g^{-1}) \circ x = 1 \circ x = x$. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 2 Es sei

$$U = \{\, 2^n : n \in \mathbb{Z} \,\} = \{\dots, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Zeigen Sie, dass U eine Untergruppe von $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.

Lösung.

1. $U \neq \emptyset$, weil z.B. $1 = 2^0 \in U$.
2. Sind $a, b \in U$, etwa $a = 2^k$, $b = 2^n$ für gewisse $k, n \in \mathbb{Z}$, so gilt auch $ab = 2^{k+n} \in U$.
3. Ist $a \in U$, etwa $a = 2^k$ für ein gewisses $k \in \mathbb{Z}$, so gilt auch $a^{-1} = 2^{-k} \in U$.