Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 · Winter 2016/17 · **Mini-Test 2** 17.10.2016

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!):

Aufgabe 1 Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion. Zeigen Sie Teil 1 von Satz 6: Durch $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ wird eine Äquivalenzrelation auf A definiert.

Lösung. Seien $x, y, z \in A$ beliebig.

1. Reflexivität: Wegen $f(x) = f(x)$ gilt offensichtlich $x \sim x$.
2. Symmetrie: Wenn $x \sim y$ gilt, dann $f(x) = f(y)$, dann $f(y) = f(x)$, dann $y \sim x$.
3. Transitivität: Wenn $x \sim y$ und $y \sim z$ gilt, dann $f(x) = f(y)$ und $f(y) = f(z)$, also $f(x) = f(z)$, also $x \sim z$.

Aufgabe 2 Sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Für $a, b \in A$ gelte $a \sim b \iff ab \in \{1, 4, 8, 9, 16\}$. (Mit dem Ausdruck ab ist hier das ganz normale Produkt „a mal b“ aus $\mathbb{Z}$ gemeint.) Es handelt sich bei $\sim$ um eine Äquivalenzrelation.

1. Geben Sie alle Paare $(a, b) \in A$ mit $a \sim b$ an.
2. Geben Sie die Elemente der Äquivalenzklasse $[1]_\sim$ an.

Bei der Formulierung dieser Aufgabe ist leider ein Fehler unterlaufen, so dass es sich bei $\sim$ in Wirklichkeit doch nicht um eine Äquivalenzrelation handelt. (Es gilt nämlich $1 \sim 4$ und $4 \sim 2$, aber $1 \not\sim 2$.) Wir werden das bei der Korrektur berücksichtigen.

Lösung.

1. $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$.
2. $[1]_\sim = \{1, 4\}$. (Oder $[1]_\sim = \{1, 2, 4\}$)