Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 · Winter 2016/17 · **Mini-Test 13** 23.01.2017

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!):

Aufgabe 1 Finden Sie den Punkt, an dem die Gerade $g = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ und die Ebene $E = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ sich schneiden.

Lösung. Wenn $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ so sind, dass $\alpha \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ gilt, dann ist $\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ der gesuchte Schnittpunkt.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 5 & 1\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt liegt demnach bei $\begin{pmatrix}-1\\-4\\-4\end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass zwei Punkte $(a_1 : a_2 : a_3), (b_1 : b_2 : b_3) \in \mathbb{P}^2$ genau dann identisch sind, wenn $\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix} = 1$ gilt.

Lösung.

$$\begin{aligned}(a_1 : a_2 : a_3) = (b_1 : b_2 : b_3) \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R} : (a_1, a_2, a_3) = \lambda(b_1, b_2, b_3)\\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Rang}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix} \leq 1.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung, denn Null könnte der Rang nur sein, wenn $a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ wäre, und das ist in der Definition des projektiven Raums ausgeschlossen ($\mathbb{P}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\sim$).