Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 · Winter 2016/17 · **Mini-Test 11** 09.01.2017

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!): | | | | | | | |

Aufgabe 1 Sei $h\colon V \to W$ eine lineare Abbildung und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Zeigen Sie: $f\colon V/U \to W,\ f([x]_\sim) = h(x)$ ist genau dann wohldefiniert, wenn $U \subseteq \ker h$ gilt.

Lösung. "$\Rightarrow$" h ist wohldefiniert. Zu zeigen: $U \subseteq \ker h$.

Sei $u \in U$. Dann gilt $[0]_\sim = [u]_\sim$, und da f wohldefiniert ist, folgt $h(u) = h(0)$, also $h(u)-h(0) = 0$, also $h(u-0) = 0$, also $h(u) = 0$, also $u \in \ker h$.

"$\Leftarrow$" $U \subseteq \ker h$. Zu zeigen: h ist wohldefiniert, d.h. für $x, y \in V$ mit $x \sim y$ gilt $h(x) = h(y)$.

Seien also $x, y \in V$ mit $x \sim y$. Dann gilt $x - y \in U \subseteq \ker h$, also $h(x-y) = 0$, also $h(x) = h(y)$, wie gefordert.

Aufgabe 2

1. Geben Sie eine geordnete Basis für den Vektorraum $V = \mathbb{K}^{2\times 2}$ aller 2×2-Matrizen an.
2. Wie lautet die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $h\colon V \to V, h(A) = A^\top$ bezüglich Ihrer Basis?

Lösung.

1. Zum Beispiel $B = (\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix})$.
2. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.