Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 · Winter 2016/17 · **Mini-Test 10** 12.12.2016

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!):

Aufgabe 1 Seien $U_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$, $U_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

1. Berechnen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.
2. Geben Sie die Dimension von $U_1 + U_2$ an.

Lösung.

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mid \cdot (-1) \end{matrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mid : (-3) \end{matrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Kern dieser Matrix ist $\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle$. Als Basis des Schnitts ergibt sich damit

$$\{-2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}\}.$$

2. Nach obiger Rechnung gilt $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$. Nach Satz der Vorlesung folgt $\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) = 2 + 2 - 1 = 3$. (Es ist mit bloßem Auge zu erkennen, dass es sich bei den angegebenen Erzeugendensystemen von U_1 und U_2 um Basen handelt.)

Aufgabe 2 Geben Sie eine Basis des Quotientenraums $\mathbb{R}^4 / \langle \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$ an.

Lösung. Zum Beispiel $\{[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\sim, [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\sim\}$.