--

Name (deutlich lesbar!)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

k

Matrikelnummer

-
- Es sind keine anderen Hilfsmittel als ein Stift zugelassen, insbesondere keine Unterlagen und keine elektronischen Geräte. Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus.
 - Die Antworten zu Aufgabe 1 sind auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Notieren Sie die Antworten für die weiteren Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten weissen Papier. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und legen Sie bei der Abgabe die Blätter in der Reihenfolge der Aufgaben zusammen, mit dem Aufgabenblatt als Deckblatt. Die abgegebenen Blätter werden oben links zusammengetackert. Halten Sie deshalb beim Schreiben genügend Abstand zu dieser Ecke.
 - Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Sie können die Teilnahme an der Klausur jederzeit ohne Abgabe einer Lösung beenden. Ein solcher Abbruch wird nicht als Fehlversuch gewertet.
-

Aufgabe 1. Wahr oder falsch?

	wahr	falsch
In $\mathbb{Z}_7$ gilt $\frac{1}{5} = 3$	☐	☐
In $\mathbb{Z}_5$ gilt $\frac{1}{7} = 3$	☐	☐
Definitionen der Form $f: A \rightarrow B/\sim$, $f(a) = [g(a)]_\sim$ sind immer repräsentantenunabhängig.	☐	☐
Vier Vektoren im $\mathbb{R}^4$ können linear unabhängig sein	☐	☐
Drei Vektoren im $\mathbb{R}^4$ können linear abhängig sein	☐	☐
Sind $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig, so ist jedes v_i eine Linearkombination der anderen Vektoren.	☐	☐
Jeder Vektorraum bildet zusammen mit Vektoraddition und Skalarmultiplikation einen Ring.	☐	☐
Die injektiven Homomorphismen bilden einen Unterraum von $\text{Hom}(V, W)$.	☐	☐
Es gibt eine lineare Abbildung $h: \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}[X]$ mit $h(X^i) = X^{i+9} - 2X^{2i+5}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.	☐	☐
Für jede invertierbare Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.	☐	☐
$\{M \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) : \det(M) = 1\}$ ist eine Untergruppe von $\text{GL}(n, \mathbb{K})$.	☐	☐
Für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n \times m}$ gilt $\text{Rang}(A + B) = \text{Rang}(A) + \text{Rang}(B)$.	☐	☐

Lösung. wahr-wahr-wahr, wahr-wahr-falsch, falsch-falsch-wahr, wahr-wahr-falsch

Aufgabe 2. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit Neutralelement e_G und sei $(H, *)$ eine Gruppe mit Neutralelement e_H . Weiter sei $h: G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus (d.h. es gelte $h(a \circ b) = h(a) * h(b)$ für alle $a, b \in G$). Zeigen Sie:

- Für die Untergruppe $U = \ker h$ von G gilt: $U = \{g \circ u \circ g^{-1} : u \in U\}$ für alle $g \in G$.
- h ist genau dann injektiv, wenn $\ker h = \{e_G\}$ gilt.

Lösung.

- Sei $g \in G$ beliebig und schreibe $U' = \{g \circ u \circ g^{-1} : u \in U\}$.
 „ $\subseteq$ “ Sei $a' \in U'$, etwa $a' = g \circ a \circ g^{-1}$ für ein $a \in U$. Dann gilt $h(a') = h(g \circ a \circ g^{-1}) = h(g) * h(a) * h(g^{-1}) = h(g) * e_H * h(g)^{-1} = e_H$. Daraus folgt $a' \in U = \ker h$.
 „ $\supseteq$ “ Sei $a \in U$. Dann gilt $h(a) = e_H$. Dann $h(g)^{-1} * h(a) * h(g) = h(g)^{-1} * e_H * h(g) = e_H$. Dann $h(g^{-1} \circ a \circ g) = e_H$, also $g^{-1} \circ a \circ g \in U$, also $a = g \circ (g^{-1} \circ a \circ g) \circ g^{-1} \in U'$.
- „ $\Rightarrow$ “ Da h ein Homomorphismus ist, gilt $h(e_G) = e_H$. Somit gilt $e_G \in \ker h$. Da h außerdem injektiv ist, kann der Kern keine weiteren Elemente enthalten, denn aus $h(g) = h(e_G) = e_H$ folgt $g = e_G$ für jedes $g \in \ker h$.
 „ $\Leftarrow$ “ Seien $a, b \in G$ mit $h(a) = h(b)$. Dann gilt $h(a) * h(b)^{-1} = e_H$, also $h(a \circ b^{-1}) = e_H$, also $a \circ b^{-1} \in \ker h$, also $a \circ b^{-1} = e_G$, also $a = b$. Damit ist gezeigt, dass h injektiv ist.

Aufgabe 3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 4}.$$

- Berechnen Sie eine Basis von $\ker A$.
- Geben Sie die Basis eines Komplementärtraums von $\ker A$ an, und begründen Sie die Richtigkeit Ihrer Wahl.
- Sei $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4$ beliebig und sei A' die Matrix, die aus A entsteht, indem man eine beliebige Zeile oder eine beliebige Spalte durch x ersetzt. Zeigen Sie: $\det A' = 0$.

Lösung.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \leftarrow -1 \\ \leftarrow + \end{array} \right] \\ \leftarrow + \end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \leftarrow -1 \\ \leftarrow + \end{array} \right] \\ \leftarrow + \end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $\ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \leftarrow 1/2 \\ \leftarrow + \end{array} \right] | : 2 \\ \leftarrow + \end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 & -1 \end{pmatrix} | \cdot (-2) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass $U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ eine mögliche Wahl ist.

- Nach Teil a) gilt $\text{Rang}(A) = 2$. Nach Satz der Vorlesung folgt, dass je drei Zeilen und je drei Spalten von A linear abhängig sind. Ersetzt man also eine beliebige Zeile oder Spalte durch einen beliebigen Vektor, so sind die drei unveränderten Zeilen oder Spalten linear abhängig. Da jede Obermenge einer linear abhängigen Menge linear abhängig ist, müssen die Zeilen und Spalten von A' linear abhängig sein. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 4. Seien U, V, W drei $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Zeigen Sie:

- a) Für jedes $g \in \text{Hom}(U, V)$ und jedes $h \in \text{Hom}(W, V)$ ist $f: U \times W \rightarrow V$, $f(u, w) = g(u) + h(w)$ eine lineare Abbildung, d.h. es gilt $f \in \text{Hom}(U \times W, V)$.
- b) Umgekehrt: Für jedes $f \in \text{Hom}(U \times W, V)$ gibt es ein $g \in \text{Hom}(U, V)$ und ein $h \in \text{Hom}(W, V)$ so dass $f(u, w) = g(u) + h(w)$ für alle $u \in U$ und alle $w \in W$.

Lösung.

- a) Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ und $(u_1, w_1), (u_2, w_2) \in U \times W$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(\alpha_1(u_1, w_1) + \alpha_2(u_2, w_2)) &= f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) \\ &= g(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) + h(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) \\ &= \alpha_1 g(u_1) + \alpha_2 g(u_2) + \alpha_1 h(w_1) + \alpha_2 h(w_2) \\ &= \alpha_1 f(u_1, w_1) + \alpha_2 f(u_2, w_2), \end{aligned}$$

wie behauptet.

- b) Wähle $g: U \rightarrow V, g(u) = f(u, 0)$ und $h: W \rightarrow V, h(w) = f(0, w)$. Dann gilt $g(u) + h(w) = f(u, 0) + f(0, w) = f((u, 0) + (0, w)) = f(u, w)$, wie gefordert, und es handelt sich um lineare Abbildungen, denn z.B. für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ und $u_1, u_2 \in U$ gilt

$$g(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, 0) = \alpha_1 f(u_1, 0) + \alpha_2 f(u_2, 0) = \alpha_1 g(u_1) + \alpha_2 g(u_2),$$

und analog für h .