Lineare Algebra und Analytische Geometrie I · Winter 2016/17 03.04.2017

Zweite Klausur

	k							

Name (deutlich lesbar!) Matrikelnummer

- Es sind keine anderen Hilfsmittel als ein Stift zugelassen, insbesondere keine Unterlagen und keine elektronischen Geräte. Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus.
- Die Antworten zu Aufgabe 1 sind auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Notieren Sie die Antworten für die weiteren Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten weissen Papier. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und legen Sie bei der Abgabe die Blätter in der Reihenfolge der Aufgaben zusammen, mit dem Aufgabenblatt als Deckblatt. Die abgegebenen Blätter werden oben links zusammengetackert. Halten Sie deshalb beim Schreiben genügend Abstand zu dieser Ecke.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Sie können die Teilnahme an der Klausur jederzeit ohne Abgabe einer Lösung beenden. Ein solcher Abbruch wird nicht als Fehlversuch gewertet.

Aufgabe 1. Wahr oder falsch?

	wahr	falsch
Ist $f\colon A \to B$ injektiv, so gilt $\lvert A\rvert \leq \lvert B\rvert$	☐	☐
Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A, so gilt immer $A \in A/{\sim}$	☐	☐
Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A, so gilt immer $A \subseteq A/{\sim}$	☐	☐
Die Treppennormalform einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ ist eindeutig bestimmt.	☐	☐
Für je zwei Transpositionen $\sigma, \pi \in S_n$ gilt $\sigma \circ \pi = \pi \circ \sigma$	☐	☐
Jeder Vektorraum ist ein Erzeugendensystem von sich selbst.	☐	☐
$[3]_{\equiv_5} \cap [5]_{\equiv_3} = \emptyset$	☐	☐
Die Menge aller Polynome vom Grad 5 bildet einen Unterraum von $\mathbb{K}[X]$	☐	☐
Für alle Vektorräume V gilt $V \cong V^{**}$	☐	☐
Jede Teilmenge einer Basis ist linear unabhängig	☐	☐
$\mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \cong \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W))$	☐	☐
Wenn h ein Isomorphismus von V nach V ist, dann ist $h = \mathrm{id}$.	☐	☐

Lösung. wahr-falsch-falsch, wahr-falsch-wahr, falsch-falsch-falsch, wahr-wahr-falsch.

Aufgabe 2. Seien $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ Funktionen und $h\colon A \to C$, $h(x) = g(f(x))$ die Verkettung von f und g. Zeigen Sie:

a) Wenn h injektiv ist, dann ist schon f injektiv.

b) Wenn h surjektiv ist, dann ist schon g surjektiv.

Lösung.

a) Seien $x_1, x_2 \in A$ so, dass $f(x_1) = f(x_2)$. Zu zeigen: $x_1 = x_2$. Wegen $f(x_1) = f(x_2)$ gilt auch $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Da h nach Annahme injektiv ist, folgt $x_1 = x_2$, wie behauptet.

b) Sei $y \in C$ beliebig. Zu zeigen: es gibt ein $x \in B$, so dass $g(x) = y$. Nach Annahme ist h surjektiv. Daher gibt es ein $a \in A$ mit $h(a) = y$. Wegen $h(a) = g(f(a))$ können wir $y = f(a)$ wählen.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die linearen Funktionen $f, g\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$, definiert durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x, \qquad g(x) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} x.$$

a) Geben Sie eine lineare Funktion $h\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^6$ an mit $\ker h = \ker f \cap \ker g$.

Hinweis: Diese Frage lässt sich ohne Rechnung beantworten.

b) Berechnen Sie eine Basis von $\operatorname{im} f \cap \operatorname{im} g$.

c) Geben Sie eine Basis von $\mathbb{Q}^3/(\operatorname{im} f \cap \operatorname{im} g)$ an.

d) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix der Verkettung $f \circ g$.

Lösung.

a) $h\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^6$, $h(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} x.$

b)

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \mid \cdot (-1) \\ + \end{matrix} \\
\leftrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ + \end{matrix} \\
\leftrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ \mid : 3 \quad 2 \end{matrix} \\
\leftrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ -1 \\ \end{matrix} \\
\leftrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Der Kern der Matrix ist $\langle \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\3\\0\\2\\0\\-1\end{pmatrix} \rangle$. Ein Erzeugendensystem des Schnitts ist deshalb

$$\{-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}, -\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, -3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\-3\end{pmatrix}\},$$

und eine Basis ist $\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\}$.

c) Ein Komplementärraum von $\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle$ ist $\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rangle$. Deshalb ist $\{[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}]_\sim, [\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}]_\sim\}$ eine Basis des Quotientenraums.

d) Es handelt sich um das Matrixprodukt

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\0 & -1 & 1\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -2 & -4\\1 & 0 & -1\\2 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5 & -4 & -7\\1 & 1 & 2\\-4 & -3 & -5\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und U ein Unterraum von V. Weiter sei M die Menge aller Homomorphismen $h\colon V \to W$ mit $U \subseteq \ker h$.

a) Zeigen Sie: M ist ein Untervektorraum von $\operatorname{Hom}(V, W)$.

b) Konstruieren Sie für den Fall $V = W = \mathbb{Q}^2$ und $U = \langle \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \rangle$ eine Basis von M.

Hinweis: Betrachten Sie die möglichen Abbildungsmatrizen der Elemente von M.

Lösung.

a) Wegen $U \subseteq V = \ker 0$ enthält M zumindest die Nullfunktion und ist deshalb nicht leer. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $f, g \in M$ beliebig. Zu zeigen: $\alpha f + \beta g \in M$, d.h. zu zeigen ist $U \subseteq \ker(\alpha f + \beta g)$.

Sei $x \in U$ beliebig. Nach Voraussetzung gilt $f, g \in M$, also $U \subseteq \ker f$ und $U \subseteq \ker g$, also $x \in \ker f$ und $x \in \ker g$, also $f(x) = g(x) = 0$. Damit gilt auch $\alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)(x) = 0$, also $x \in \ker(\alpha f + \beta g)$, wie behauptet.

b) Gesucht sind alle Matrizen $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ mit $A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Für eine beliebige Matrix $A = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ gilt

$$A \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-b\\c-d\end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor ist offenbar genau dann Null, wenn $a = b$ und $c = d$ gilt. Die gesuchten Matrizen sind also genau jene, die die Form $A = \begin{pmatrix}a & a\\b & b\end{pmatrix}$ für beliebige $a, b \in \mathbb{Q}$ haben. Eine Basis des Raums M ist deshalb

$$\{x \mapsto \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}x, \quad x \mapsto \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}x\}.$$