Lineare Algebra und Analytische Geometrie I · Winter 2016/17 08.02.2017

Erste Klausur

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!):

- Es sind keine anderen Hilfsmittel als ein Stift zugelassen, insbesondere keine Unterlagen und keine elektronischen Geräte. Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus.
- Die Antworten zu Aufgabe 1 sind auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Notieren Sie die Antworten für die weiteren Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten weissen Papier. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und legen Sie bei der Abgabe die Blätter in der Reihenfolge der Aufgaben zusammen, mit dem Aufgabenblatt als Deckblatt. Die abgegebenen Blätter werden oben links zusammengetackert. Halten Sie deshalb beim Schreiben genügend Abstand zu dieser Ecke.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Sie können die Teilnahme an der Klausur jederzeit ohne Abgabe einer Lösung beenden. Ein solcher Abbruch wird nicht als Fehlversuch gewertet.

Aufgabe 1. Wahr oder falsch?

	wahr	falsch
Für zwei bijektive Funktionen $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$	☐	☐
Ist $f\colon A \to B$ injektiv und $g\colon B \to C$ surjektiv, so ist $g \circ f$ bijektiv	☐	☐
Sind A, B Untergruppen von G mit $A \subseteq B$, so ist A auch eine Untergruppe von B	☐	☐
Ist $\sim$ eine Äq.-Rel. auf A, so gilt $[x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset$ oder $[x]_\sim = [y]_\sim$ für alle $x, y \in A$	☐	☐
Ein endlich-dim. Vektorraum kann unendlich viele verschiedene Unterräume haben	☐	☐
Die Vektoren $u, u + v, v + w, w$ sind linear abhängig	☐	☐
Ist $\dim(V) = \infty$ und U ein Unterraum von V, so gilt $\dim(V/U) = \infty$	☐	☐
Für jeden Unterraum U von V gibt es einen Unterraum W von V mit $V = U \oplus W$	☐	☐
$\dim(V \times W) = \dim(V) \cdot \dim(W)$	☐	☐
Ein inhomogenes Gleichungssystem $Ax = b$ über $\mathbb{Q}$ kann mehrere Lösungen haben	☐	☐
$\det\colon \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ ist eine lineare Abbildung	☐	☐
Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt $\det(A) = \det(A^\top)$	☐	☐

Lösung. wahr-falsch-wahr, wahr-wahr-wahr, falsch-wahr-falsch, wahr-falsch-wahr

Aufgabe 2. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und e das Neutralelement von G. Zeigen Sie:

a) Wenn für alle $a, b \in G$ gilt $a \circ b \circ a^{-1} \circ b^{-1} = e$, dann ist G abelsch.

b) $Z = \{\, a \in G \mid \forall\, b \in G : a \circ b \circ a^{-1} \circ b^{-1} = e \,\} \subseteq G$ ist eine Untergruppe von G.

c) Ist $H \subseteq G$ eine Untergruppe von G, so wird durch $a \sim b \iff a \circ b^{-1} \in H$ eine Äquivalenzrelation auf G definiert.

Lösung.

a) Zu zeigen: für alle $a, b \in G$ gilt $a \circ b = b \circ a$. Seien $a, b \in G$ beliebig. Nach Voraussetzung gilt $a \circ b \circ a^{-1} \circ b^{-1} = e$. Multiplikation mit $b \circ a$ von rechts liefert

$$\underbrace{a \circ b \circ \underbrace{(a^{-1} \circ b^{-1} \circ b \circ a)}_{=e}}_{=a \circ b} = \underbrace{e \circ b \circ a}_{=b \circ a},$$

wie gewünscht.

b) Zu zeigen: Z ist nicht leer und für je zwei Elemente $a, b \in Z$ gilt $a \circ b \in Z$ und $a^{-1} \in Z$.

1. Z ist nicht leer, denn zumindest für das Neutralelement e gilt $e \circ b = b \circ e = b$ für alle $b \in G$, daher $e \in Z$.

2. Sind $a, b \in Z$, so gilt $\forall\, c \in G : a \circ c = c \circ a \wedge b \circ c = c \circ b$. Für beliebiges $c \in G$ gilt dann auch

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ (c \circ b) = (a \circ c) \circ b = (c \circ a) \circ b = c \circ (a \circ b),$$

wie gewünscht.

3. Ist $a \in Z$, so gilt $\forall\, b \in G : a \circ b = b \circ a$. Für beliebiges $b \in G$ gilt dann auch $a^{-1} \circ b = (b^{-1} \circ a)^{-1} = (a \circ b^{-1})^{-1} = b \circ a^{-1}$, wie gewünscht.

c) Reflexivität: $a \circ a^{-1} = e \in H$.

Symmetrie: $a \sim b \Rightarrow a \circ b^{-1} \in H \Rightarrow (a \circ b^{-1})^{-1} = b \circ a^{-1} \in H \Rightarrow b \sim a$.

Transitivität: $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \circ b^{-1}, b \circ c^{-1} \in H \Rightarrow a \circ b^{-1} \circ b \circ c^{-1} = a \circ c^{-1} \in H \Rightarrow a \sim c$.

Aufgabe 3. Seien $V = \mathbb{Q}^5$, $W = \mathbb{Q}^4$ und $h \colon V \to W$ definiert durch $h(x) = Ax$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie eine Basis von $\ker h$.

b) Die Funktion h ist nicht injektiv. Konstruieren Sie einen dreidimensionalen Unterraum U von V, so dass die Einschränkung $h|_U \colon U \to W$, $h|_U(x) := h(x)$ injektiv ist.

c) Warum kann es einen vierdimensionalen Unterraum U von V mit der in (b) geforderten Eigenschaft nicht geben?

d) Warum ist es nicht möglich, den Unterraum U in (b) so zu wählen, dass außerdem die Funktion $f \colon V/U \to W$, $f([x]_\sim) = h(x)$ wohldefiniert ist?

Lösung.

a)

$$
\begin{pmatrix}
1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\
2 & -2 & 2 & 4 & 2 \\
1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 1
\end{pmatrix}
\begin{matrix} {\scriptstyle -2 \quad -1} \\ {\scriptstyle +} \\ {\scriptstyle +} \\ \end{matrix}
\leftrightarrow
\begin{pmatrix}
1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\
0 & 0 & 4 & -8 & 4 \\
0 & 2 & 3 & -8 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 1
\end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \mid :2 \\ \mid :4 \; {\scriptstyle -1} \\ {\scriptstyle +} \end{matrix}
$$

$$
\leftrightarrow
\begin{pmatrix}
1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\
0 & 1 & 3/2 & -4 & 1/2 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{matrix} {\scriptstyle +} \\ {\scriptstyle +} \\ {\scriptstyle -3/2} \\ \end{matrix}
$$

$$
\leftrightarrow
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{matrix} {\scriptstyle +} \\ \\ \\ \end{matrix}
$$

$$
\leftrightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Daraus folgt $\ker h = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$.

b) Wähle einen Komplementärraum von $\ker h$, zum Beispiel $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Dann gilt $U \cap \ker h = \{0\}$, und daher $\ker h|_U = \{0\}$.

c) Ist U ein Unterraum von V mit $\dim U = 4$, so gilt

$$\dim(U \cap \ker h) = \dim(U) + \dim \ker h - \underbrace{\dim(\underbrace{U + \ker h}_{\subseteq V})}_{\leq 5} \geq 4 + 2 - 5 = 1$$

Dann gibt es also ein $u \in U \cap \ker h$ mit $u \neq 0$. Wegen $h|_U(u) = h|_U(0) = 0$ kann $h|_U$ also nicht injektiv sein.

d) Damit f wohldefiniert ist, müsste $U \subseteq \ker h$ gelten. Die Eigenschaft aus (b) erfordert $U \cap \ker h = \{0\}$. Beides gleichzeitig erfüllt nur der Raum $U = \{0\}$, der nicht dreidimensional ist.

Aufgabe 4. Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Wir betrachten die Transpositionsabbildung

$$\top\colon \operatorname{Hom}(V, W) \to \operatorname{Hom}(W^*, V^*), \quad h \mapsto h^\top$$

mit $h^\top(y^*)(x) = y^*(h(x))$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\top$ linear ist. Zeigen Sie nun:

a) $\top$ ist injektiv.

b) Wenn V und W beide endlich-dimensional sind, dann ist $\top$ auch surjektiv.

Lösung.

a) Sei $h \in \operatorname{Hom}(V, W)$ so, dass $h^\top = 0$ ist. Zu zeigen: $h = 0$. Angenommen nicht. Dann gibt es ein $x \in V$ mit $h(x) \neq 0$. Dann gibt es eine Basis von W, die $h(x)$ enthält. Daraus lässt sich ein $y^* \in W^*$ mit $y^*(h(x)) = 1$ konstruieren. Für ein solches y^* und das x von zuvor gilt dann $h^\top(y^*)(x) = 1 \neq 0$, also $h^\top \neq 0$. Widerspruch.

b) In diesem Fall gilt $V \cong V^*$ und $W \cong W^*$, daher $\operatorname{Hom}(V, W) \cong \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$. Weiters ist $\dim \operatorname{Hom}(V, W) = \dim(V) \dim(W)$ endlich. Damit ist h eine Abbildung zwischen zwei endlich-dimensionalen Vektorräumen der gleichen Dimension. Nach einem Satz der Vorlesung sind in diesem Fall Injektivität und Surjektivität äquivalent. Die Behauptung folgt also aus Teil a).