Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 **Wintersemester 2016/17**
http://www.algebra.uni-linz.ac.at/teaching/ws2016/linalg/

Übungsblatt 9

Besprechung am **5.12.2016**

Aufgabe 1 Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist ein Unterraum des Vektorraums der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$?

a) $\{f \mid f(1) = f(2)\}$,
b) die Menge der beschränkten Funktionen,
c) die Menge der injektiven Funktionen,
d) die Menge der surjektiven Funktionen,
e) $\{f \mid f$ ist differenzierbar und $\forall x : f(x^2+1) = f'(\sin(x)) + f(x)\}$.

Aufgabe 2 (Basisergänzung). a) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^4$ die Menge

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix} \right\}.$$

Man bestimme eine Basis von $\mathbb{R}^4$, die A enthält.

b) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Es sei $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ die konstante Funktion $x \mapsto 1$. Es sei P der Vektorraum aller zweierpotenzperiodischen Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$, damit ist gemeint

$$P := \{f \mid \exists t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \forall n \in \mathbb{Z} : f(n+2^t) = f(n)\}.$$

Man bestimme eine Basis für P, die a enthält.

Aufgabe 3 Es sei V ein Vektorraum über einem Körper. Es seien U_1, U_2, W Unterräume von V. Zeigen oder widerlegen Sie:
a) $U_1 + W = U_2 + W \implies U_1 = U_2$.
b) $U_1 \cup U_2$ ist ein Unterrraum von $V \Leftrightarrow (U_1 \subseteq U_2) \vee (U_2 \subseteq U_1)$.

Aufgabe 4 Kann man das Wort "*abelsche*" in der Definition 29 (Definition eines Vektorraums) streichen, ohne den Inhalt der Definition zu ändern? Mit anderen Worten, lässt sich die Behauptung, daß die Gruppe $(V, +)$ abelsch ist, aus den Punkten 1-4 der Definition ableiten?

Aufgabe 5 **Diese Aufgabe ist schriftlich auszuarbeiten und abzugeben.** Es sei V ein Vektorraum über einem Körper. Es seien U_1, U_2. Man zeige oder widerlege

$$\dim(U_1 + U_2) \leq \dim(U_1) + \dim(U_2).$$