Übungsblatt 8

Besprechung am **28.11.2016**

Aufgabe 1 Schreiben Sie die folgenden Permutationen als Komposition disjunkter Zyklen, bestimmen Sie ihre Fixpunkte und ihr Vorzeichen.

a) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 3 & 2 & 10 & 7 & 4 & 5 & 1 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in S_{10}$

b) $\pi = (1\ 3\ 2\ 4) \circ (5\ 7\ 1\ 8\ 3) \circ (5\ 3\ 1\ 2) \in S_{10}$

c) $\pi = (1\ 2\ 5\ 3\ 7\ 4)^{60002} \in S_{10}$

Aufgabe 2 Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

a) Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

b) Falls A invertierbar ist und $A^{-1} = A^\top$, dann gilt $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

c) Ist A die Permutationsmatrix einer Permutation $\pi \in S_n$, so gilt $\det(A) = \operatorname{sgn}(\pi)$.

d) Wenn $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Matrix ist, die aus A entsteht, wenn man die Zeilen von A von hinten nach vorne liest, also $B = ((a_{i,n+1-j}))_{i,j=1}^n$ für $A = ((a_{i,j}))_{i,j=1}^n$, dann gilt $\det(A) = (-1)^n \det(B)$.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{Q}$, für die die folgenden Vektoren linear abhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{Q}^4.$$

Aufgabe 4 Zeigen Sie:

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 2 & 3 & & n \end{vmatrix} = 1, \qquad \text{b)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & \cdots & \cdots & 5 \\ 5 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 5 \\ 5 & \cdots & \cdots & 5 & 1 \end{vmatrix} = (5n-4)(-4)^{n-1},$$

wobei die Größe der Matrix jeweils $n \times n$ ist.

Aufgabe 5 Zeigen Sie:

a) Die Inverse einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n\times n} \subseteq \mathbb{Q}^{n\times n}$ liegt genau dann in $\mathbb{Z}^{n\times n}$, wenn $\det(A) \in \{-1, 1\}$ gilt.

b) Ist U eine Untergruppe von $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$, so ist $\mathcal{U} = \{\, A \in \mathbb{K}^{n\times n} : \det(A) \in U \,\}$ zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.