Übungsblatt 7

Besprechung am **21.11.2016**

Aufgabe 1 Berechnen Sie eine explizite Darstellung von $\ker A$. Dabei sei

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 1 & 0 & 14 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 19 & 0 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 13 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 6 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und seien $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

a) In $\mathbb{K}^{n\times n}$ sind alle Elementarmatrizen invertierbar.

b) Die Äquivalenz von Matrizen, d.h. die Relation $\leftrightarrow$ auf $\mathbb{K}^{n\times m}$ aus Definition 24, ist eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 3 Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$, und seien $A \in \mathbb{K}^{3\times 4}$, $b \in \mathbb{K}^3$, $b' \in \mathbb{K}^3$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei die Zahlen in den Matrizen für die entsprechenden Elemente von $\mathbb{K}$ stehen.

a) Berechnen Sie die Treppennormalform von A und von $(A \mid b)$.

b) Welchen Rang haben A und $(A \mid b)$?

c) Bestimmen Sie $\{x \in \mathbb{K}^4 \;:\; A \cdot x = 0\}$ und $\{x \in \mathbb{K}^4 \;:\; A \cdot x = b\}$ explizit.

d) Ist der Vektor b eine Linearkombination der Spalten von A?

Beantworten Sie alle Unterpunkte auch für den Vektor b' anstelle von b.

Aufgabe 4 Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_5)^{2\times 2}$.

a) Berechnen Sie A^{-1}.

b) Zerlegen Sie A^{-1}, A und $A^\top$ in Produkte von Elementarmatrizen. Sind diese Zerlegungen eindeutig?

Aufgabe 5 Sei A eine Matrix in Treppennormalform ohne Nullzeilen.

a) Konstruieren Sie eine Permutationsmatrix P sowie $n, q \in \mathbb{N}$ und eine $n \times q$-Matrix B, sodass

$$A \cdot P = \begin{pmatrix} I_n & B \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie: Die Spalten der damit gebildeten Matrix $\begin{pmatrix} B \\ -I_q \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, und jede ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} I_n & B \end{pmatrix} \cdot x = 0.$$

c) Zeigen Sie weiters: Auch die Spalten der Matrix $P \cdot \begin{pmatrix} B \\ -I_q \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, und jede ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot x = 0.$$

(Zur Schreibweise mit Blockmatrizen vergleichen Sie Satz 18.)