Übungsblatt 6

Besprechung am **14.11.2016**

Aufgabe 1 (Lineare Abhängigkeit) Es seien b_1, b_2 Vektoren im $\mathbb{R}^m$.

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2 mit $v_1 = -4b_1 + 6b_2$ und $v_2 = 6b_1 - 9b_2$ stets linear abhängig sind.

b) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2 mit $v_1 = b_1 - 2b_2$ und $v_2 = b_1 - b_2$ genau dann linear abhängig sind, wenn b_1, b_2 linear abhängig sind.

Aufgabe 2 (Linearkombinationen) Es seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 19 \\ 11 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass ein Vektor $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ genau dann eine Linearkombination von v_1, v_2, v_3 ist, wenn $x - 7y + 12z = 0$ gilt.

Aufgabe 3 (Matrizen) Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -2 \\ -1 & 6 & 15 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Welches Gleichungssystem müssen sie lösen, um festzustellen, ob die Zeilenvektoren von A linear unabhängig sind? Geben Sie, falls die Zeilenvektoren von A linear abhängig sind, eine Linearkombination der Zeilen von A an, die den Nullvektor ergibt, und in der nicht jede Zeile 0 mal genommen wird.

b) Welches Gleichungssystem müssen sie lösen, um festzustellen, ob die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind?

c) Welches Gleichungssystem müssen Sie lösen, um festzustellen, ob $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination der Spalten von A ist? Ist w eine Linearkombination der Spalten von A?

Aufgabe 4 (Matrizen) Sei K ein Körper, sei A eine $l \times m$-Matrix über K, und seien B, C $m \times n$-Matrizen über K. Zeigen Sie die folgenden Gleichheiten, indem Sie jeweils für die linke und rechte Seite der Gleichung den (i, j)-ten Eintrag ausrechnen.

a) $I_l \cdot A = A$.

b) $A \cdot I_m = A$.

c) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$.

Aufgabe 5 (Linearkombinationen) **Diese Aufgabe ist schriftlich auszuarbeiten und abzugeben.**
Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq 1$, seien $b_1, \ldots, b_m \in K^n$, und sei $v \in K^n$ eine Linarkombination von $b_1, \ldots, b_m$. Zeigen Sie, dass $(b_1, \ldots, b_m)$ genau dann linear unabhängig ist, wenn es nur ein $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in K^m$ mit $\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_m b_m = v$ gibt.