Übungsblatt 4

Besprechung am **31.10.2016**

Aufgabe 1 (Untergruppen) Auf der Menge $G = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}\}$ sei die Verknüpfung $\circ\colon G \times G \to G$ durch folgende Tabelle definiert:

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	d	c	f	e
c	c	f	e	b	a	d
d	d	e	f	a	b	c
e	e	d	a	f	c	b
f	f	c	b	e	d	a

Es gilt also zum Beispiel $\mathtt{c} \circ \mathtt{d} = \mathtt{b}$ und $\mathtt{d} \circ \mathtt{c} = \mathtt{f}$. Es handelt sich bei $(G, \circ)$ um eine Gruppe. Bestimmen Sie alle Untergruppen dieser Gruppe.

Hinweis: Es gibt insgesamt sechs und die Aufgabe gilt als gelöst, wenn sie diese gefunden haben. Sie können sich darüber hinaus aber auch überlegen, wie man am leichtesten zeigen könnte, dass es keine weiteren gibt.

Aufgabe 2 (Isomorphie) Die Gruppen $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (mit komponentenweiser Addition), $\mathbb{Z}_4$ (mit Addition) und $\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]_{\equiv_5}\}$ (mit Multiplikation) haben jeweils vier Elemente. Welche dieser drei Gruppen sind zueinander isomorph?

Aufgabe 3 (Kern und Bild) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ eine Untergruppe hat, die zu $(\mathbb{Z}_5, +)$ isomorph ist, sowie eine Untergruppe, die zu $(\mathbb{Z}_3, +)$ isomorph ist. Geben Sie dazu einen Homomorphismus $h\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{15}$ an mit $\ker h \cong \mathbb{Z}_5$ und $\operatorname{im} h \cong \mathbb{Z}_3$.

Aufgabe 4 (Ringe) Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins. Die Menge

$$R^\times = \{\, x \in R \mid \exists\, y \in R : xy = yx = 1 \,\}$$

aller in R bezüglich $\cdot$ invertierbaren Elemente nennt man die *multiplikative Gruppe* des Rings R.

a) Zeigen Sie, dass $R^\times$ zusammen mit der Multiplikation $\cdot$ von R eine Gruppe bildet.

b) Bestimmen Sie die multiplikativen Gruppen der folgenden Ringe: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 5 (Körper) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{\, a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbb{Q} \,\} \subseteq \mathbb{R}$$

zusammen mit der üblichen Addition und Multiplikation einen Körper bildet.