Übungsblatt 3

Besprechung am **24.10.2016**

Aufgabe 1 (Injektivität und Kürzbarkeit) ***Diese Aufgabe ist schriftlich abzugeben.***
Seien A und B Mengen. Zeigen Sie: Eine Funktion $f : A \to B$ ist genau dann injektiv, wenn für alle Mengen X und Funktionen $g, h : X \to A$ gilt

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Aufgabe 2 (Bilder und Urbilder) Sei f eine Funktion von der Menge X nach Y.

a) Gilt für alle Teilmengen A, B von X die Gleichheit

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)?$$

b) Gilt für alle Teilmengen C, D von Y die Gleichheit

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)?$$

c) Wenn eine der obigen Gleichheiten nicht gilt, zeigen Sie, dass zumindest eine einseitige Teilmengenrelation ($\subseteq$ bzw. $\supseteq$) gilt, und finden Sie ein Gegenbeispiel für die andere Richtung.

d) Lassen sich die Gleichheiten in jedem Fall zeigen, wenn f als injektiv oder surjektiv vorausgesetzt wird?

Aufgabe 3 (Homomorphiesatz)

a) Sei A eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation in A. Zeigen Sie: Es gibt eine Menge B und eine Funktion $f : A \to B$, sodass

$$\forall a, b \in A : \quad a \sim b \iff f(a) = f(b)$$

b) Geben Sie für die Menge $\mathbb{Z}$ und die Relation $\equiv_5$ konkret eine passende Funktion gemäß Teilaufgabe a) an.

Aufgabe 4 (Modulare Arithmetik) Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

a) Zeigen Sie, dass durch

$$[x]_{\equiv_m} \cdot [y]_{\equiv_m} = [x \cdot y]_{\equiv_m}$$

tatsächlich eine assoziative Funktion von $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$ nach $\mathbb{Z}_m$ definiert wird.

b) Erstellen Sie konkret die Verknüpfungstabellen von $\big(\mathbb{Z}_4 \setminus \{[0]_{\equiv_4}\}, \cdot\big)$ und $\big(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]_{\equiv_5}\}, \cdot\big)$. Welche davon ergibt eine Gruppe?

Aufgabe 5 (Inverse, Satz 7) Sei $\circ$ eine assoziative Verknüpfung in der Menge A mit Neutralelement e. Zeigen Sie, dass

a) $e^{-1} = e$;

b) für alle in A invertierbaren Elemente x gilt: $(x^{-1})^{-1} = x$;

c) für alle in A invertierbaren Elemente x, y gilt: $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$.