Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 **Wintersemester 2016/17**
http://www.algebra.uni-linz.ac.at/teaching/ws2016/linalg/

Übungsblatt 2

Besprechung am **17.10.2016**

Aufgabe 1 (Kartesisches Produkt)

a) Zeigen Sie, dass die Gleichheit

$$(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D) \tag{1}$$

nicht für alle Mengen A, B, C, D gilt, indem Sie konkrete Mengen A, B, C, D angeben, für die die Gleichheit (1) nicht gilt.

b) Finden Sie Mengen A, B, C, D mit $A \neq B$ und $C \neq D$, für die die Gleichheit (1) gilt.

c) Verändern Sie die rechte Seite der Gleichheit so, dass Sie eine Gleichheit der Form $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D) \cup \ldots \cup \ldots$ erhalten, die für alle Mengen A, B, C, D stimmt, und beweisen Sie diese neue Gleichheit.

Aufgabe 2 (Relationen) Bestimmen Sie für jede der folgenden Relationen, ob sie reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv oder total ist.

a) $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < y\}$.

b) Die Relation L sei eine Relation auf den Punkten der Ebene. Dabei gelte $(P, Q) \in L$ genau dann, wenn P vom Ursprung $\binom{0}{0}$ höchstens so weit entfernt wie Q ist.

c) Sei A eine endliche nichtleere Menge, und sei

$$M = \{(C, D) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid C \text{ und } D \text{ haben gleich viele Elemente}\}.$$

Vorsicht: Die Antwort hängt von A ab, denn A kann, aber muss nicht einelementig sein.

Aufgabe 3 (Relationen) Sei $\sim$ die Relation auf $\mathbb{N}$, die durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow [x^2]_{\equiv_3} = [y^2]_{\equiv_3}$$

definiert ist. Die Zahl x steht also in Relation zu y, wenn x^2 und y^2 den gleichen Rest bei der Division durch 3 haben.

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Wie viele Äquivalenzklassen hat $\mathbb{N}$ modulo $\sim$?

c) Geben Sie die Faktormenge $\mathbb{N}/\sim$ durch Aufzählen ihrer Elemente an.

d) Ist die Relation $\{([x]_\sim, [x+1]_\sim) \mid x \in \mathbb{N}\}$ eine Funktion von $\mathbb{N}/\sim$ nach $\mathbb{N}/\sim$?

Aufgabe 4 (Funktionen) Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen, ob sie injektiv, surjektiv, oder bijektiv ist. Geben Sie für die bijektiven Funktionen auch ihre inversen Funktionen an.

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{x}{x-2}$ for $x \in \mathbb{R}$.

b) $g : \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) \setminus \{\emptyset\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $g(A) := \min(A)$. (So ist zum Beispiel $g(\{2, 4, 5\}) = 2$.)

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 - 3x - 4$. *Hinweis:* Beachten Sie, dass $h(x) = h(3 - x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 5 Sei A eine Menge, und seien f und g Funktionen von A nach A. Zeigen Sie:

a) Wenn $f \circ g$ injektiv ist, so ist g injektiv.

b) Wenn $f \circ g$ surjektiv auf A ist, so ist auch f surjektiv auf A.