Übungsblatt 14

Besprechung am **30.01.2016**

Aufgabe 1 (C-finite Folgen) Finden Sie Rekurrenzen für die Folgen $a, b, c : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$! F_n ist dabei die n-te Fibonaccizahl.

$$a(n) = F_{2n},\ b(n) = n2^n,\ c(n) = n + 2^n.$$

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie Teil 1 von Satz 70 aus dem Vorlesungsskriptum:

> Wenn $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ eine Rekurrenz $\sum_{i=0}^{r} \alpha_i a(n+i) = 0$ und $b : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ eine Rekurrenz $\sum_{i=0}^{s} \beta_s b(n+s) = 0$ mit $\alpha_0, \ldots, \alpha_r, \beta_0, \ldots, \beta_s \in \mathbb{Q}$ und $\alpha_r \neq 0, \beta_s \neq 0$ erfüllt, so erfüllt $c(n) := a(n) + b(n)$ eine Rekurrenz $\sum_{i=0}^{r+s} \gamma_i c(n+i) = 0$ mit $(\gamma_0, \ldots, \gamma_{r+s}) \neq 0$.

Hinweis: Zeigen Sie durch Induktion nach t, dass für jedes $t \in \mathbb{N}$ die Folge $(c(n+t))_{n=0}^{\infty}$ eine Linearkombination von $\{(a(n+k))_{n=0}^{\infty} \mid k \in \{0, \ldots, r-1\}\} \cup \{(b(n+k))_{n=0}^{\infty} \mid k \in \{0, \ldots, s-1\}\}$ ist.

b) Ein Kollege präsentiert Ihnen folgenden Beweis für die Identität von Cassini über Fibonaccizahlen, die besagt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichheit $F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ gilt.

> "Wenn man für n die Zahlen bis 9 einsetzt, dann erhält man $0 - 1 = -1, 2 - 1 = 1, 3 - 4 = -1, 10 - 9 = 1, 24 - 25 = -1, 65 - 64 = 1, \ldots, 3026 - 3025 = 1$. Und wenn es für die ersten 10 natürlichen Zahlen stimmt, dann stimmt es wohl immer."

Vervollständigen Sie den Beweis Ihres Kollegen, indem Sie sich überlegen, was für eine Rekurrenz $G(n) := F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 - (-1)^{n+1}$ erfüllen muss. Ist es dazu nötig, eine Rekurrenz für $G(n)$ zu berechnen?

Aufgabe 3 Sei A die Adjazenzmatrix eines Graphen $G = (V, E)$ mit v Knoten. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Bedingungen äquivalent sind:

a) Es gibt einen Zyklus der Länge m in G, das heißt, es gibt also $m \geq 1$ und $v_0, \ldots, v_{m-1} \in V$, sodass $(v_0, v_1) \in E, \ldots, (v_{m-2}, v_{m-1}) \in E$, und $(v_{m-1}, v_0) \in E$.

b) $A^v \neq 0$.

Aufgabe 4 Wir wählen als Codewörter eines Codes der Länge 8 alle $\overline{x} \in (\mathbb{Z}_2)^8$, die folgendes Gleichungssystem (über $\mathbb{Z}_2$) erfüllen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für diesen Code die Anzahl der Codewörter und seine Minimaldistanz.

Aufgabe 5 Zeigen Sie, dass die Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, die durch $a(n) = \frac{1}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert ist, nicht C-finit ist. *Hinweis:* Sie dürfen im Beweis folgende Aussage verwenden, die Sie hier nicht zu beweisen brauchen: Seien $p_0, \ldots, p_r \in \mathbb{Q}$ so, dass die Menge $N = \{x \in \mathbb{Q} \mid \sum_{i=0}^{r} p_i x^i = 0\}$ zumindest $r + 1$ Elemente enthält. Dann gilt $N = \mathbb{Q}$.