Übungsblatt 12

Besprechung am **16.01.2017**

Aufgabe 1 Es sei $V = \mathbb{Q}[X]_{\leq 2}$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens zwei.

a) Zeigen Sie: $B = (1 + X + X^2, 1 + 2X + 4X^2, 1 + 3X + 9X^2)$ ist eine geordnete Basis von V.

b) Geben Sie die Basis-Wechselmatrix $T_{E\to B} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ an, die Koordinaten bezüglich der Standardbasis $E = (1, X, X^2)$ in Koordinaten bezüglich der Basis B aus Teil a) umwandelt.

c) Wie lautet die geordnete Basis C von V, für die

$$T_{C\to B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt? Die Basiselemente von C sind bezüglich der Standardbasis darzustellen.

Aufgabe 2 Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ fix und betrachten Sie die Abbildung $h\colon \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}$, $h(M) = AM$.

a) Zeigen Sie, dass h eine lineare Abbildung ist.

b) Zeigen oder widerlegen Sie: die Determinante von h im Sinn von Def. 37 ist genau $\det(A)$.

c) Wie hängen $\dim \ker h$ und $\dim \operatorname{im} h$ mit $\operatorname{Rang}(A)$ zusammen?

Aufgabe 3 Die Teile b) und d) dieser Aufgabe sind schriftlich auszuarbeiten und abzugeben. Seien U, V, W drei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeigen Sie:

a) $\operatorname{Hom}(U, V \times W) \cong \operatorname{Hom}(U, V) \times \operatorname{Hom}(U, W)$.

b) $\operatorname{Hom}(U, \operatorname{Hom}(V, W)) \cong \operatorname{Hom}(V, \operatorname{Hom}(U, W))$.

c) $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^2, V) \cong V \times V$.

d) Ist U ein Unterraum von V, so ist $\operatorname{Hom}(U, W)$ isomorph zu einem Unterraum von $\operatorname{Hom}(V, W)$.

Aufgabe 4 Es sei $h\colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $h(p) = X^2 p$. Finden Sie eine Basis von $\operatorname{coker} h \subseteq \mathbb{K}[X]^*$.

Aufgabe 5 In Satz 61 wurde gezeigt, wie man aus einer Basis eines endlich-dimensionalen Vektorraums V eine Basis für dessen Dualraum V^* konstruieren kann. Nehmen wir nun umgekehrt an, dass V irgendein Vektorraum ist, und dass wir eine geordnete Basis $B^* := (b_1^*, \ldots, b_n^*)$ für dessen Dualraum V^* kennen. Wir wollen eine geordnete Basis B von V konstruieren, so dass B^* die zu B duale Basis ist.

a) Zeigen Sie: V muss endlich-dimensional sein, und zwar muss $\dim(V) = n$ gelten.

b) Zeigen Sie: Ist $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine beliebige Basis von V, so ist die Matrix $M = ((m_{i,j}))_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $m_{i,j} = b_i^*(a_j)$ invertierbar.

c) Seien A und M wie oben, und sei $j \in \{1, \ldots, n\}$. Sei $m = (m_1, \ldots, m_n)$ die j-te Spalte von M^{-1} und $b_j = m_1 a_1 + \cdots + m_n a_n$. Zeigen Sie: für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt dann $b_i^*(b_j) = \delta_{i,j}$.

d) Zeigen Sie, dass die Vektoren $b_1, \ldots, b_n$ aus Teil c) eine Basis von V bilden.

e) Damit ist die Existenz einer Basis B mit der gewünschten Eigenschaft gezeigt. Ist diese Basis eindeutig durch B^* bestimmt? (Beweis oder Gegenbeispiel)