Übungsblatt 11

Besprechung am **9.1.2017**

Aufgabe 1 Es sei

a) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$;

b) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$.

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{K}^2$ über $\mathbb{K}$ sowie $f, g : V \to V$ gegeben durch

$$f(a, b) = (a^2, b^3), \quad g(a, b) = (a^3, b^3).$$

Sind f bzw. g linear?

Aufgabe 2 a) Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = (3x - 4z, 5y - x - \frac{z}{5});$$
$$g(x, y, z) = (3x - 4z, x - 5y - 2).$$

Eine davon ist linear. Bestimmen Sie deren Abbildungsmatrix bezüglich den kanonischen Basen der entsprechenden Vektorräume.

b) Wir betrachten die geordneten Basen $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ von $\mathbb{R}^3$ und $C = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ von $\mathbb{R}^2$. Die Abbildung $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ habe bezüglich B und C die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $h(x, y, z)$, für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

c) Gegeben seien die 3 linear unabhängigen Vektoren u, v, w, a, b im $\mathbb{R}^3$. In der Sonne werfen a, b, c einen Schatten auf die von den Vektoren a und b aufgespannte Ebene. Der Schatten von u ist a, der von v ist $a + 2b$, und der von w ist $3a + 5b$. Argumentieren Sie geometrisch, warum die Abbildung, die jedem Vektor seinen Schatten zuordnet, linear ist. Bestimmen Sie eine Darstellungsmatrix dieser Abbildung bezüglich geeigneten Basen.

In welcher Richtung steht die Sonne?

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass die Sonnenstrahlen parallel ankommen.

Aufgabe 3 Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V_1, V_2, V_3 endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass für alle $f : V_1 \to V_2$ und $g : V_2 \to V_3$ gilt

$$\dim \ker(g \circ f) \leq \dim \ker f + \dim \ker g.$$

Gilt auch die Gleichheit? *Hinweis:* Betrachten Sie die Einschränkung von f auf den Unterraum $\ker(g \circ f)$, insbesondere deren Kern und Bild. Eines davon liegt in $\ker g$ (warum?), sodass sich ein passender Satz aus Kapitel 16 anwenden lässt.

Aufgabe 4 Seien U und V wie in Aufgabe 1 vom Übungsblatt 10. Geben Sie einen Isomorphismus zwischen $U/(U \cap V)$ und $(U+V)/V$ explizit an. Berechnen Sie weiters jeweils eine Basis von $U/(U \cap V)$ und von $(U+V)/V$. Wie bildet Ihr Isomorphismus diese Basen aufeinander ab?

Aufgabe 5 a) Sei $h : V \to V$ linear mit $h^2 = h$. Zeigen Sie, dass dann V eine direkte Summe von Kern und Bild von h ist, dass also

$$V = \ker h \oplus \operatorname{im} h.$$

Hinweis: Zerlegen Sie einen Vektor v als $(v - h(v)) + h(v)$.

b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Behauptung von Teil a) auch gilt, wenn die Bedingung $h^2 = h$ weggelassen wird?

Wir wünschen Ihnen erholsame Ferien!