Übungsblatt 1

Besprechung am **10.10.2016**

Aufgabe 1 a) Übersetzen Sie die folgende Formel in natürliche Sprache: $\forall\ x : (x \in A \cup B \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B))$.

b) Übersetzen Sie die folgende Aussage in eine Formel: *Wenn alle Katzen gelbe Augen haben, dann hat auch meine Katze gelbe Augen.* Verwenden Sie dazu K als Symbol für die Menge aller Katzen, und $\mathrm{hga}(x)$ für „x hat gelbe Augen".

c) Formen Sie die Formel $\neg\exists\ x : (p(x) \Rightarrow \forall\ y : p(y))$ in eine äquivalente Formel um, bei der alle Negationssymbole $\neg$ unmittelbar vor einem p stehen.

d) Es sei A die Menge aller natürlicher Zahlen, die die dritte Potenz einer Zahl sind, die durch 5 teilbar ist. Übersetzen Sie die Definition von A in Formelzeichen.

e) Es sei $B = \{\, u \in \mathbb{N} \mid \exists\ v \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} : v^2 \mid u \,\}$. Übersetzen Sie die Definition von B in natürliche Sprache.

Aufgabe 2 a) Gegeben seien die Mengen $A = \big\{3, \{5\}, 7\big\}$ und $B = \big\{3, \{5,7\}\big\}$. Man gebe folgende Mengen explizit an:

$$A \cup B, \quad A \setminus B, \quad A \times B, \quad \bigcap_{a \in \mathcal{P}(A)} a.$$

b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$$\big\{\{3\}, \emptyset\big\} \subseteq \big\{3, \{3\} \cup \{4\}, \{3\} \cap \{4\}, \{3\} \setminus \{4\}\big\}$$
$$\big\{3, \{4\}\big\} \in \big\{\{3\}, \{4\}, 3, 2, \{1\}\big\}$$
$$\big\{3, \{4\}\big\} \subseteq \big\{\{3\}, \{\{4\}\}, 3, 2, \{1\}\big\}$$

Aufgabe 3 a) Geben Sie für die drei Mengen $\{0,1\}$, $\{\{0,1\}\}$ und $\emptyset$ jeweils die Potenzmenge an.

b) Wenn $a_1, \dots, a_n$ paarweise verschiedene Objekte sind (d.h. wenn gilt $a_i \neq a_j$ für alle $i \neq j$), wie viele Elemente hat dann die Potenzmenge von $\{a_1, \dots, a_n\}$?

Aufgabe 4 Beweisen Sie Punkt 5 von Satz 1: Wenn A und $\Lambda \neq \emptyset$ Mengen sind, und für jedes $\lambda \in \Lambda$ auch A_λ eine Menge ist, dann gilt

$$A \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \setminus A_\lambda) \quad \text{und} \quad A \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A \setminus A_\lambda).$$

Aufgabe 5 a) Sei $R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \mathrm{ggT}(x,y) \neq 1\}$ eine Relation, d.h. xRy genau dann, wenn x und y einen gemeinsamen Teiler haben. Welche der in der Vorlesung eingeführten Eigenschaften (reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv, total) besitzt die Relation R?

b) Zeigen Sie, dass die Relationen $\mid$ (auf $\mathbb{Z}$) und $\subseteq$ (auf einer Menge von Mengen) Halbordnungen sind.