Diskrete Strukturen

Manuel Kauers

Institut für Algebra
Johannes Kepler Universität

Version: 10. Oktober 2016

Inhalt

1 Mengen und Formeln

Eine *Menge* (engl. *set*) ist ein abstraktes Objekt, das andere abstrakte Objekte beinhaltet, die sogenannten *Elemente* (engl. *element*) der Menge.

Beispiel.

1. $\mathbb{N}$ ist die Menge aller natürlicher Zahlen $0, 1, 2, \ldots$.
2. $\mathbb{Z}$ ist die Menge aller ganzer Zahlen.
3. $\mathbb{Q}$ ist die Menge aller rationaler Zahlen.
4. $\mathbb{R}$ ist die Menge aller reeller Zahlen.
5. $\{\square, \circ, \triangle, \blacksquare\}$ ist die Menge, die die vier Objekte $\square, \circ, \triangle$ und $\blacksquare$ beinhaltet.

Die Notation $1 \in \mathbb{N}$ bedeutet, dass das Objekt 1 ein Element der Menge $\mathbb{N}$ ist. Die Notation $\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$ bedeutet, dass das Objekt $\frac{1}{3}$ kein Element der Menge $\mathbb{N}$ ist. Die Notation $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ bedeutet, dass $\mathbb{N}$ eine *Teilmenge* (engl. *subset*) von $\mathbb{Q}$ ist, d.h. jedes Element von $\mathbb{N}$ ist auch ein Element von $\mathbb{Q}$ (aber nicht unbedingt umgekehrt).

Wenn M eine Menge ist, dann bezeichnet $\mathcal{P}(M)$ die *Potenzmenge* (engl. *power set*) von M. Das ist die Menge aller Teilmengen von M. Es gilt also

$$A \subseteq M \iff A \in \mathcal{P}(M)$$

für alle Mengen A und M.

Beispiel. Für $M = \{1, 2, 3\}$ gilt

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Dabei bezeichnet das Symbol $\emptyset$ die *leere Menge* ($\emptyset = \{\}$).

Man beachte, dass die Elemente einer Menge ihrerseits selbst Mengen sein können. Davon darf man sich nicht verwirren lassen. Es gilt zum Beispiel $1 \in \{1\}$ und $\{1\} \in \{\{1\}\}$, aber $1 \notin \{\{1\}\}$ und $\{1\} \notin \{1\}$. Insbesondere gilt $1 \neq \{1\}$: das Objekt 1 ist etwas anderes als die Menge, deren einziges Element dieses Objekt ist. Beachten Sie auch, dass eine Menge niemals ein Element von sich selbst sein kann.

Wenn M eine Menge ist, dann muss für **jedes** Objekt x entweder $x \in M$ oder $x \notin M$ gelten. Weitere Informationen codiert die Menge nicht. Insbesondere nicht, „wie oft“ ein Element in der Menge enthalten ist (z.B. gilt $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 2, 2, 3, 3\}$) oder „in welcher Reihenfolge“ (z.B. gilt $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$). Zwei Mengen A, B sind gleich, wenn für jedes Objekt x gilt $x \in A \iff x \in B$.

Man kann sich eine Menge vorstellen als Codierung einer Eigenschaft, die ein Objekt haben kann. Element der Menge zu sein bedeutet die betreffende Eigenschaft zu besitzen; nicht Element der Menge zu sein bedeutet sie nicht zu besitzen. Zum Beispiel ist $\mathbb{N}$ die Menge aller Objekte, die die Eigenschaft haben, eine natürliche Zahl zu sein. Umgekehrt: ist A irgendeine Menge, dann haben ihre Elemente die Eigenschaft, Elemente von A zu sein. Das ist zumindest insofern eine Eigenschaft, als es die Elemente von A von allen anderen Objekten unterscheidet.

Eigenschaften von Objekten einer gegebenen Menge A entsprechen Teilmengen dieser Menge. Solche Teilmengen lassen sich auch durch eine Funktion $p\colon A \to \{\mathrm{True}, \mathrm{False}\}$ beschreiben, die für jedes Element $x \in A$ angibt, ob es die Eigenschaft hat ($p(x) = \mathrm{True}$) oder nicht ($p(x) = \mathrm{False}$). Man verwendet die Notation $\{\, x \in A : p(x) \,\}$ oder $\{\, x \in A \mid p(x) \,\}$ für die Menge aller x aus A, für die $p(x)$ wahr ist. Das ist eine Teilmenge von A.

Beispiel.

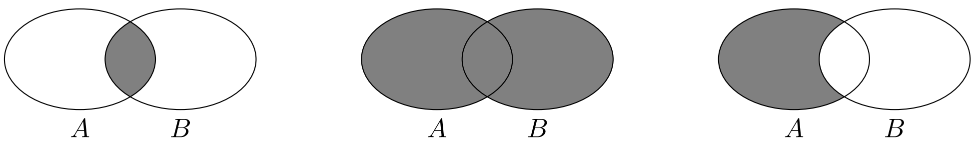
1. $\{ x \in \mathbb{Z} : \text{die letzte Ziffer von } x \text{ ist } 3 \} = \{\dots, -23, -13, -3, 3, 13, 23, \dots\}$
2. $\{ p \in \mathbb{N} : p \text{ ist eine Primzahl} \} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$
3. $\{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \}$ ist die Menge aller positiven reellen Zahlen.
4. $\{ u \in \{\square, \blacksquare, \circ, \triangle\} : u \text{ ist schwarz} \} = \{\blacksquare\}$
5. $\{ s \in K : s \text{ hat bestanden} \}$, wobei K die Menge der Teilnehmer der Vorlesungsklausur ist.

Es gibt noch eine weitere Notation, mit der man Mengen beschreiben kann. Dazu geht man von zwei bekannten Mengen A, B aus und betrachtet eine Funktion $f\colon A \to B$ (siehe Abschnitt 3 für eine genaue Erklärung des Begriffs Funktion). Dann schreibt man $\{ f(x) : x \in A \}$ oder $\{ f(x) \mid x \in A \}$ für die Menge aller $y \in B$, so dass es ein $x \in A$ gibt mit $y = f(x)$. Zum Beispiel ist $\{ x^2 : x \in \mathbb{Z} \}$ die Menge aller Quadratzahlen.

Man kann diese Notation auch mit der vorherigen kombinieren: $\{ f(x) : x \in A, p(x) \}$ bezeichnet die Menge aller $y \in B$, so dass es ein $x \in A$ mit der Eigenschaft $p(x) = \text{True}$ gibt, für das $y = f(x)$ gilt. Zum Beispiel ist $\{ x^2 : x \in \mathbb{N}, n \text{ prim} \} = \{4, 9, 25, 49, 121, 169, \dots\}$.

Sind A, B Mengen, so sind die Vereinigung $A \cup B$, der Schnitt $A \cap B$ und die Differenz $A \setminus B$ definiert durch

$$\begin{aligned} \forall\, x : \big(x \in A \cap B &\iff x \in A \wedge x \in B\big) \\ \forall\, x : \big(x \in A \cup B &\iff x \in A \vee x \in B\big) \\ \forall\, x : \big(x \in A \setminus B &\iff x \in A \wedge x \notin B\big) \end{aligned}$$



Die Notation $\forall\, x : \dots$ bedeutet „für alle Objekte x gilt/gelte …“. Mit der Notation $\exists\, x : \dots$ meint man „es gibt ein Objekt x, für das gilt/gelte …“. Die Symbole $\forall$ und $\exists$ bezeichnet man als *Quantoren* (engl. *quantifier*).

Beispiel. $\forall\, x : \big(x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, y : (y \in \mathbb{Q} \wedge x \cdot y = 1)\big)$ bedeutet:
„für alle Objekte x gilt, wenn sie zu $\mathbb{Q}$ gehören, dass es ein (zu x passendes) Objekt y gibt, dass zu $\mathbb{Q}$ gehört, und für das gilt $x \cdot y = 1$“.

So etwas nennt man eine *Formel* (engl. *formula*). Eine Formel kann wahr oder falsch sein. Dagegen ist z. B. $x^2 - 7x + 2$ keine Formel sondern ein *Ausdruck* (engl. *expression*). Die Formel im obigen Beispiel ist falsch. Eine Formel ist genau dann falsch, wenn ihre *Negation* (ihr „Gegenteil“) wahr ist.

Beachten Sie, dass sich logische Zeichen beim Negieren von Formeln ändern können. Insbesondere gilt

- $\neg\big(\forall\, x : p(x)\big) \iff \exists\, x : \neg p(x)$
- $\neg(A \Rightarrow B) \iff (A \wedge \neg B)$
- $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$, usw.

Beispiel. Die Negation der Formel aus dem vorherigen Beispiel lautet

$$\exists\, x : (x \in \mathbb{Q} \wedge \forall\, y : (y \notin \mathbb{Q} \vee x \cdot y \neq 1)).$$

(„Es gibt ein Objekt x, das zu $\mathbb{Q}$ gehört, so dass für alle Objekte y gilt: y gehört nicht zu $\mathbb{Q}$ oder $x \cdot y = 1$“)

Um eine Formel des Typs $\exists\, x : p(x)$ zu beweisen, genügt es, ein konkretes Objekt x anzugeben, und dann zu beweisen, dass $p(x)$ für diese Wahl von x wahr ist. Im obigen Beispiel können wir $x = 0$ wählen, denn für diese Wahl von x gilt sicher

$$0 \in \mathbb{Q} \wedge \forall\, y : (y \notin \mathbb{Q} \vee 0 \cdot y \neq 1),$$

weil ja $0 \cdot y = 0 \neq 1$ für alle $y \in \mathbb{Q}$ gilt. Damit ist gezeigt, dass die Negation der ursprünglichen Formel wahr ist. Also war die ursprüngliche Formel falsch.

Die modifizierte Formel

$$\forall\, x : (x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow \exists\, y : (y \in \mathbb{Q} \wedge x \cdot y = 1))$$

ist dagegen wahr. Hier haben wir eine Formel des Typs $\forall\, x : p(x)$ zu beweisen. Dazu betrachtet man ein beliebig aber fest gewähltes Objekt x. Anders als vorher treffen wir keine konkrete Wahl sondern machen im Gegenteil keine weiteren Annahmen über x. Wir zeigen

$$x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow \exists\, y : (y \in \mathbb{Q} \wedge x \cdot y = 1).$$

Es gibt zwei Fälle zu unterscheiden: $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $x \notin \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Im Fall $x \notin \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist nichts zu zeigen. (Warum nicht?) Betrachten wir also den Fall $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. In diesem Fall ist zu zeigen

$$\exists\, y : (y \in \mathbb{Q} \wedge x \cdot y = 1),$$

wobei x das beliebig aber fest gewählte x aus $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist. Betrachte die konkrete Wahl $y = \frac{1}{x}$. Wegen $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist y ein Element von $\mathbb{Q}$ und es gilt $x \cdot y = x \cdot \frac{1}{x} = 1$, wie gefordert. Damit ist der Beweis fertig.

Also noch einmal zusammengefasst:

- Wenn man $\forall\, x : p(x)$ beweisen soll, schreibt man „Wähle ein beliebiges Objekt x“. Man wählt dieses Objekt aber nicht als Autor des Beweises, sondern überlässt die Wahl quasi dem Leser. Dann beweist man $p(x)$ für das „beliebige“ Objekt x, über das man keine weiteren Annahmen getroffen hat. Nur wenn das gelingt, hat man gezeigt, dass $p(x)$ wirklich für alle Objekte x gilt.
- Wenn man $\exists\, x : p(x)$ beweisen soll, darf man als Autor des Beweises ein geeignetes Objekt x auswählen und schreibt „Betrachte das Objekt $x = \dots$“. Dann beweist man $p(x)$ für diese konkrete Wahl. Wenn das gelingt, hat man gezeigt, dass es ein Objekt gibt, für das $p(x)$ gilt, nämlich das, das man angegeben hat. Die Wahl des Objekts kann durchaus von anderen „beliebigen“ Objekten abhängig gemacht werden, so wie die Wahl von y in Abhängigkeit von x im obigen Beispiel.

Komplementär dazu gibt es die Situation, dass man bekannte Fakten in einem Beweis ausnutzen will.

- Wenn wir schon wissen, dass $\forall\, x : p(x)$ gilt, dann können wir für jedes beliebige Objekt y, von dem im Beweis die Rede ist, ohne weiteres annehmen, dass $p(y)$ gilt.
- Wenn wir schon wissen, dass $\exists\, x : p(x)$ gilt, dann können wir uns in einem Beweis ein solches Objekt verschaffen, indem wir sagen „Sei x ein Element mit der Eigenschaft $p(x)$“.

Mehr über die Behandlung von Quantoren im besonderen und logischer Formeln im allgemeinen erfahren Sie in anderen Lehrveranstaltungen.

Da man es fast immer mit Objekten zu tun hat, die zu irgendeiner Menge gehören, ist es zweckmäßig, folgende Kurzschreibweisen einzuführen:

- $\forall\, x \in M : \dots$ für $\forall\, x : (x \in M \Rightarrow \dots)$ („für alle Elemente x von M gilt …")
- $\exists\, x \in M : \dots$ für $\exists\, x : (x \in M \wedge \dots)$ („es gibt ein Element x von M, so dass …")

Neben den allgemeinen logischen Schlussregeln, die wir oben kurz skizziert haben, gibt es auch noch einige Beweistechniken, die sich nur auf bestimmte Typen von Objekten anwenden lassen. Das wichtigste Beispiel ist das Prinzip der *vollständigen Induktion*. Dieses Prinzip bietet sich immer dann an, wenn man es mit einer Aussage über die natürlichen Zahlen zu tun hat:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : p(n).$$

Die Idee ist, dass man zunächst $p(0)$ beweist (was meistens sehr einfach ist), und dann die Formel

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : p(n) \Rightarrow p(n+1).$$

Wenn diese nämlich wahr ist, dann folgt aus $p(0)$, dass auch $p(1)$ gilt, und daraus folgt, dass auch $p(2)$ gilt, und daraus folgt, dass auch $p(3)$ gilt, und so weiter. Es gilt dann also $p(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wie behauptet.

Beispiel. Wir beweisen die Summationsformel $\forall\, n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist die Formel wahr, denn es gilt $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0$ und $\frac{1}{6}0(0+1)(2\cdot 0+1) = 0$.

Induktionsschluss $n \to n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, und nehmen wir an, die Formel für dieses n gilt. Wir zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ anstelle von n gilt. Dazu rechnen wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 && \text{(Abspalten des letzten Terms)}\\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 && \text{(Verwendung der Voraussetzung)}\\
&= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1) && \text{(Nachrechnen).}
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis fertig.

2 Zeichenketten

Sei Ω eine beliebige endliche Menge. Wir fassen die Elemente von Ω als Buchstaben auf und wollen aus diesen Buchstaben Wörter bilden. Ein Wort ist dabei einfach eine Aneinanderreihung von endlich vielen Buchstaben. Es kommt nicht darauf an, ob es einen Sinn hat.

Beispiel. $\Omega = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$. Dann sind zum Beispiel `aabcbacc` und `accbaccba` zwei Wörter.

Beachte: Die Reihenfolge der Buchstaben ist relevant: `ab` und `ba` sind zwei verschiedene Wörter.

Formal sind Wörter nichts anderes als Tupel von Buchstaben. Was ist ein Tupel? Zunächst: Sind A, B zwei Mengen, so bezeichnet $A \times B$ die Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Beispiel. $\{1,2\} \times \{3,4\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$.

Der Begriff des Tupels ist eine Verallgemeinerung: sind $A_1, \ldots, A_n$ Mengen, so ist $A_1 \times \cdots \times A_n$ die Menge aller *Tupel* $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$. Man schreibt A^n statt $A \times A \times \cdots \times A$. Im Fall $n = 1$ ist $A^1 = A$ und im Fall $n = 0$ ist $A^0 = \{()\}$ die Menge, die nur das leere Tupel enthält.

Wenn wir diese Begriffe als bekannt voraussetzen, können wir Wörter wie folgt formal definieren.

Definition 1. Sei Ω eine endliche Menge. Dann heißt

$$\Omega^* := \Omega^0 \cup \Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \cdots$$

die Menge aller *Wörter* oder *Zeichenketten* (engl. *string*) über dem *Alphabet* Ω. Es soll also gelten $\omega \in \Omega^* \iff \exists\, n \in \mathbb{N} : \omega \in \Omega^n$.

Statt $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ schreibt man in diesem Zusammenhang einfach $a_1 a_2 \cdots a_n$.

Das Wort $\epsilon = () \in \Omega^0 \subseteq \Omega^*$ heißt das *leere Wort*.

Die *Länge* eines Wortes $\omega \in \Omega^*$ ist definiert als das (eindeutig bestimmte) $n \in \mathbb{N}$ mit $\omega \in \Omega^n$, und wird mit $|\omega| := n$ bezeichnet.

Beispiel. $\Omega = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, $|\mathtt{abcba}| = 5$, $|\epsilon| = 0$.

Definition 2. Seien $\omega = a_1 a_2 \ldots a_n$, $\chi = b_1 b_2 \ldots b_m$ zwei Wörter über einem Alphabet Ω. Dann heißt $\omega \circ \chi := a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_m \in \Omega^*$ die *Konkatenation* (engl. *concatenation*) von ω und χ.

Folgende Beobachtungen über die Konkatenation lassen sich leicht nachvollziehen:

1. Alle Wörter lassen sich durch Konkatenation aus Elementen des Alphabets bilden, z.B. gilt $\mathtt{abcca} = \mathtt{a} \circ \mathtt{b} \circ \mathtt{c} \circ \mathtt{c} \circ \mathtt{a}$.
2. $\forall\, \omega, \chi \in \Omega^* : |\omega \circ \chi| = |\omega| + |\chi|$
   (Die Schreibweise $\forall\, x, y \in M$ bedeutet $\forall\, x \in M\ \forall\, y \in M$; die entsprechende Abkürzung für $\exists$ ist auch erlaubt.)
3. Im allgemeinen gilt $\omega \circ \chi \neq \chi \circ \omega$
4. $\forall\, \omega \in \Omega^* : \omega \circ \epsilon = \epsilon \circ \omega = \omega$
5. $\forall\, \omega, \chi, \sigma \in \Omega^* : (\omega \circ \chi) \circ \sigma = \omega \circ (\chi \circ \sigma)$

Die letzten beiden Formeln haben verblüffende Ähnlichkeit mit bekannten Rechengesetzen für Zahlen:

$$\forall\, a \in \mathbb{Z} : a + 0 = 0 + a = a \quad \text{und} \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{Z} : (a + b) + c = a + (b + c).$$

Das wirft interessante Fragen auf:

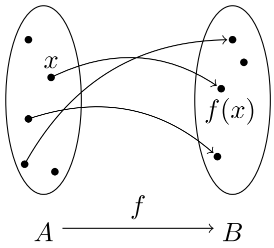
- Kann man mit Wörtern rechnen wie mit Zahlen?
- Wenn man Funktionen auf Wörtern definiert, wie verhalten sich diese zur Konkatenation?
- Wie kann man Gleichungen für Wörter lösen?
- Was, wenn man bestimmte Wörter als „im wesentlichen gleich“ auffassen will (z.B. gleich bis auf Groß-Kleinschreibung)?

Um solche Fragen zu klären, werden wir uns in den folgenden beiden Abschnitten Funktionen und Relationen genauer ansehen. Einige weitere interessante Fragen sind zum Beispiel:

- wie viele Wörter der Länge n gibt es, die ein bestimmtes vorgegebenes Wort nicht als Teilwort enthalten?
- wie findet man heraus, ob ein Wort in einem anderen enthalten ist?

Wir werden auf solche und ähnliche Fragen im Verlauf der Vorlesung zurückkommen. Wörter und Mengen von Wörtern sind dabei immer nur als Beispiel für einen (relativ einfachen) Typ diskreter Strukturen anzusehen. Ähnliche Fragen lassen sich auch für kompliziertere Strukturen stellen, denen wir später begegnen werden.

3 Funktionen



Definition 3. Seien A, B zwei Mengen. Eine Teilmenge $f \subseteq A \times B$ heißt *Funktion* (engl. *function*) von A nach B, falls gilt:

1. $\forall\, a \in A\ \exists\, b \in B : (a, b) \in f$
2. $\forall\, a \in A\ \forall\, b_1, b_2 \in B : (a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f \Rightarrow b_1 = b_2$.

Wenn f eine Funktion ist, schreibt man $f\colon A \to B$ statt $f \subseteq A \times B$ und $f(a) = b$ statt $(a, b) \in f$.

Man nennt A den Definitionsbereich und B den Bildbereich von f.

Beispiel.

1. Seien $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$. Eine Teilmenge von $A \times B$ lässt sich in Tabellenform notieren, indem man die Zellen $(x, y) \in A \times B$ markiert, die zur Teilmenge gehören sollen. Welche der folgenden Teilmengen von $A \times B$ sind Funktionen von A nach B?

	1	2	3
c		●	
b			●
a	●		

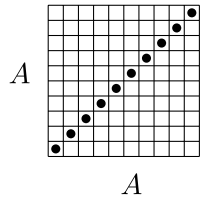
	1	2	3
c			
b		●	●
a	●		

	1	2	3
c			
b			●
a	●		

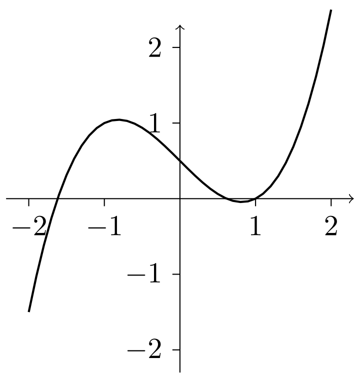
	1	2	3
c		●	
b		●	
a	●		●

   Die ersten beiden sind Funktionen, die anderen nicht. Die dritte verletzt die erste Bedingung der Definition und die vierte die zweite Bedingung der Definition. Nur wenn beide Bedingungen erfüllt sind, handelt es sich um eine Funktion.

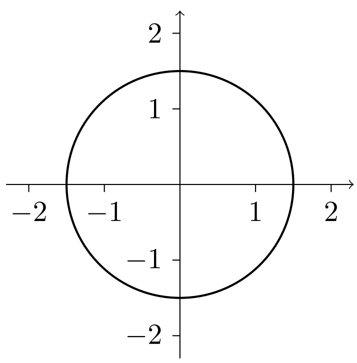
2. Sei A irgendeine Menge. Dann ist $\mathrm{id}_A\colon A \to A$, $\mathrm{id}_A(x) = x$ eine Funktion, die sogenannte *Identitätsfunktion*.



3. Bei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x + \frac{1}{2}$ handelt es sich um eine Funktion:



Dagegen entspricht die Kreislinie um den Ursprung mit Radius 3/2 nicht einer Funktion:



Für $x < -1$ und $x > 1$ verletzt sie die erste Bedingung der Definition, und für $-1 < x < 1$ verletzt sie die zweite.

4. $f\colon \Omega^* \to \mathbb{N}$, $f(\omega) = |\omega|$ ist eine Funktion.

5. Manche Funktionen lassen sich am leichtesten durch eine Fallunterscheidung beschreiben, z.B. die Funktion

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ eine Primzahl ist} \\ 0 & \text{falls nicht} \end{cases}$$

Um eine zulässige Funktionsdefinition zu bekommen, muss die Fallunterscheidung geeignet gewählt sein. Damit die erste Bedingung erfüllt ist, muss jedes x von mindestens einem Fall abgedeckt sein. Die zweite Bedingung der Definition ist dann erfüllt, wenn jedes x von höchstens einem Fall abgedeckt ist.

6. Bei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ handelt es sich **nicht** um eine Funktion, weil $f(0)$ nicht definiert ist. Auch

$$f\colon \Omega^* \to \Omega,\ f(\omega) := \text{erster Buchstabe von } \omega$$

ist keine gültige Definition, weil in diesem Fall $f(\epsilon)$ nicht definiert ist.

Man sollte in solchen Fällen erst gar nicht die Funktionsnotation $f\colon A \to B$ verwenden, sondern entweder allgemein von einer Teilmenge von $f \subseteq A \times B$ sprechen oder die Definition so korrigieren, dass es sich wirklich um eine Funktion handelt. Zum Beispiel sind

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f\colon \Omega^* \to \Omega \cup \{\epsilon\}, \quad f(\omega) = \begin{cases} \text{erster Buchstabe von } \omega & \text{falls } |\omega| \geq 1 \\ \epsilon & \text{falls } |\omega| = 0 \end{cases}$$

gültige Funktionsdefinitionen.

7. Seien $\Omega, \bar{\Omega}$ zwei Alphabete und sei $f\colon \Omega \to \bar{\Omega}$ eine Funktion.

Dann ist auch $F\colon \Omega^* \to \bar{\Omega}^*$ mit $F(a_1 a_2 \ldots a_n) := f(a_1) f(a_2) \ldots f(a_n)$ eine Funktion.

Diese Funktion ist mit der Komposition verträglich in dem Sinn, dass gilt

$$\forall\ \omega, \chi \in \Omega^* : F(\omega \circ \chi) = F(\omega) \circ F(\chi).$$

Eine Funktion mit dieser Eigenschaft heißt *Worthomomorphismus*.

8. Betrachte folgenden Algorithmus:

INPUT: eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$
OUTPUT: eine Zahl $y \in \mathbb{Z}$

```
setze z = 1
falls x < 0 ist,
  setze z = −1 und x = −x.
setze y = 0
solange x ≠ 0 ist:
  falls x ungerade ist:
    setze y = y + 1 und x = x − 1
  setze x = x/2.
gib z · y als Ergebnis zurück.
```

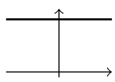
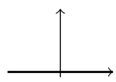
Dieser Algorithmus definiert eine Funktion $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Um das einzusehen, muss man sich überlegen, dass der Algorithmus (a) für jede mögliche Eingabe eine Ausgabe liefert (und nicht etwa einen Fehler produziert oder in einer Endlosschleife landet), und (b) dass die Ausgabe nur von der Eingabe abhängt (und nicht etwa auch von einem Zufallsgenerator oder der Uhrzeit oder sonstigen externen Größen, die bei verschiedenen Aufrufen verschiedene Werte annehmen können).

Intuitiv kann man sich eine Funktion grundsätzlich vorstellen als etwas, das einen Input nimmt und dazu einen passenden Output produziert. Aber Vorsicht: nicht jede (mathematische) Funktion lässt sich durch einen Algorithmus berechnen. Es gibt sogenannte „unberechenbare“ Funktionen, für die man beweisen kann, dass es keinen Algorithmus gibt, der diese Funktionen berechnet. Wie solche Funktionen aussehen, erfahren Sie in Vorlesungen über theoretische Informatik.

9. Für den (mathematischen) Begriff einer Funktion ist nicht wesentlich, dass man zu jedem x aus dem Definitionsbereich den zugehörigen Funktionswert $f(x)$ explizit bestimmen kann. Es genügt, dass die Funktionswerte durch die Definition eindeutig festgelegt sind. Zum Beispiel ist

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls am 1.8. des Jahres 50 n.Chr. ein römischer Soldat} \\ & \text{innerhalb der heutigen Stadtgrenzen von Linz ein Glas} \\ & \text{Milch verschüttet hat.} \\ 0 & \text{falls nicht} \end{cases}$$

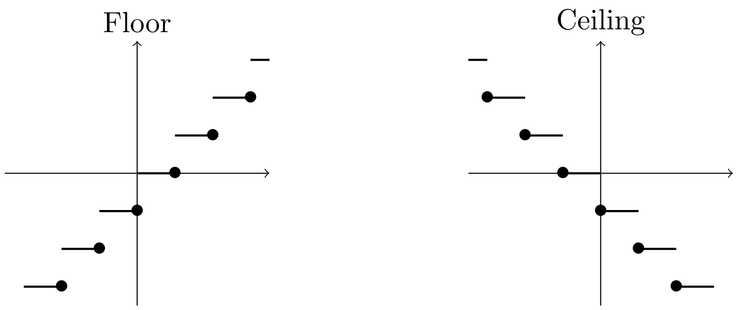
eine gültige Funktionsdefinition. Es handelt sich nämlich definitiv um eine der folgenden beiden Funktionen:

$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 1$  oder $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = 0$ 

Dass es sich nicht ohne weiteres herausfinden lässt, um welche der beiden, mag ein praktisches Problem sein, ein theoretisches ist es nicht.

10. Die Funktion $\lfloor\cdot\rfloor\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ ist so definiert, dass $\lfloor x\rfloor$ (gesprochen „Floor x“) die größte Zahl $m \in \mathbb{Z}$ ist, für die $m \leq x$ gilt. Zum Beispiel gilt $\lfloor 5\rfloor = \lfloor 5.00000001\rfloor = \lfloor 5.9999999998\rfloor = 5$, $\lfloor -\frac{1}{2}\rfloor = -1$ usw.

    Die Funktion $\lceil\cdot\rceil\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ ist so ähnlich definiert: $\lceil x\rceil$ (gesprochen „Ceiling x“) ist die kleinste Zahl $m \in \mathbb{Z}$, für die $m \geq x$ gilt. Zum Beispiel gilt $\lceil 5\rceil = \lceil 4.99999998\rceil = \lceil 4.00000001\rceil = 5$, $\lceil -\frac{1}{2}\rceil = 0$, usw.



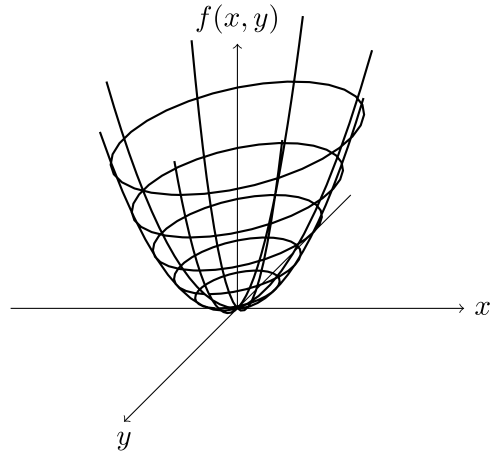
Durch die ausgefüllten Kreise soll verdeutlicht werden, welches der Funktionswert an den Stellen ist, wo ein Zweig beginnt und ein anderer endet.

Es gilt $\forall\, x \in \mathbb{R} : \lfloor -x\rfloor = -\lceil x\rceil$.

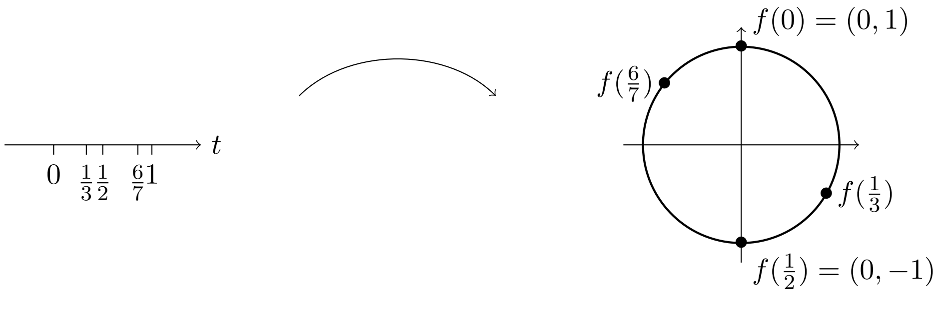
11. Funktionen, die von mehreren Variablen abhängen, sind formal dasselbe wie Funktionen, deren Definitionsbereich Tupel sind. Ein Beispiel ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + y^2,$$

die jedem Paar (x,y) zweier reeller Zahlen eine reelle Zahl $f(x,y)$ zuordnet. Eine solche Funktion kann man sich als Gebirgslandschaft vorstellen:



Umgekehrt kann auch ein Funktionswert ein Tupel sein. Zum Beispiel lässt sich mit einer Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ die Flugbahn eines Teilches im dreidimensionalen Raum beschreiben: zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Teilchen am Punkt $f(0)$, zum Zeitpunkt $t = 1/2$ am Punkt $f(1/2)$, usw. Man kann mit solche Funktionen auch Kurven in der Ebene beschreiben. Zum Beispiel die Kreislinie mit der Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = \big(\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)\big)$. Bei dieser Funktion wird der Kreis beginnend beim Punkt $(0,1)$ im Uhrzeigersinn durchlaufen:



Definition 4. Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion.

1. f heißt *injektiv* (engl. *injective*), falls gilt:

$$\forall\ a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

2. f heißt *surjektiv* (engl. *surjective*), falls gilt:

$$\forall\ b \in B\ \exists\ a \in A : f(a) = b.$$

3. f heißt *bijektiv* (engl. *bijective*), falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Injektiv bedeutet, dass jedes Element des Bildbereichs *höchstens* einmal getroffen wird. Surjektiv bedeutet, dass jedes Element des Bildbereichs *mindestens* einmal getroffen wird. Bijektiv bedeutet, dass jedes Element des Bildbereichs *genau* einmal getroffen wird. Man vergleiche die beiden Formeln in obiger Definition mit den beiden Formeln in Def. 3.

Beispiel.

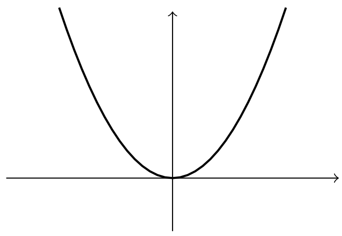
1. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$. Von den folgenden beiden Funktionen ist die linke injektiv, die rechte nicht (weil der Wert `c` mehr als einmal getroffen wird).

   Eine surjektive Funktion von A nach B kann es in diesem Fall offenbar nicht geben, weil die Menge B mehr Elemente hat als A.

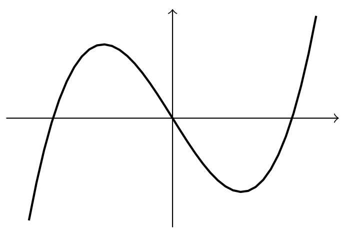
2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$. Von den folgenden beiden Funktionen ist die linke surjektiv, die rechte nicht (weil der Wert `b` nicht getroffen wird).

   Eine injektive Funktion von A nach B kann es in diesem Fall offenbar nicht geben, weil die Menge A mehr Elemente hat als B.

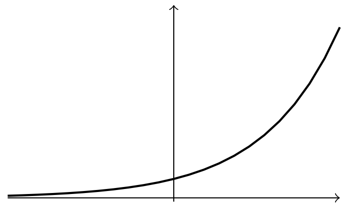
3. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv. Sie ist nicht injektiv, weil z.B. der Wert 4 des Bildbereichs sowohl von 2 als auch von -2 getroffen wird: $f(-2) = f(2) = 4$. Sie ist nicht surjektiv, weil z.B. der Wert -1 des Bildbereichs überhaupt nicht getroffen wird.



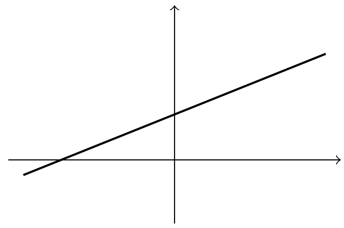
4. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 10x$ ist surjektiv, aber nicht injektiv. Dass sie surjektiv ist, beweist man mit Techniken, die man in der Analysis lernt. Dass sie nicht injektiv ist, sieht man daran, dass z.B. der Wert 0 sowohl an der Stelle $x = 0$ als auch an den Stellen $\sqrt{10}$ und $-\sqrt{10}$ angenommen wird.



5. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x$ ist injektiv, aber nicht surjektiv. Dass sie injektiv ist, zeigt man wieder mit den Mitteln der Analysis. Dass sie nicht surjektiv ist, sieht man daran, dass z.B. der Wert -1 nirgends angenommen wird.



6. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ ist bijektiv.
   Beweis: (1) sie ist injektiv, denn wenn $x, y \in \mathbb{R}$ so sind, dass $f(x) = f(y)$ gilt, dann gilt $\frac{1}{3}x + 1 = \frac{1}{3}y + 1$, also $\frac{1}{3}x = \frac{1}{3}y$, also $x = y$, wie gefordert.
   (2) sie ist surjektiv, denn wenn $y \in \mathbb{R}$ beliebig ist, dann gibt es ein passendes $x \in \mathbb{R}$, nämlich $x = 3y - 3$, so dass $f(x) = \frac{1}{3}(3y - 3) + 1 = y$ ist.



7. Die Funktion $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x+2$ ist injektiv, aber nicht surjektiv. Dass sie injektiv ist, zeigt man ähnlich wie im vorherigen Beispiel. Dass sie nicht surjektiv ist, liegt daran, dass z.B. der Wert 2 des Bildbereiches nicht getroffen wird.

Definition 5. Seien $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ zwei Funktionen. Dann heißt die Funktion $g \circ f\colon A \to C$, $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ die *Verkettung* oder *Hintereinanderausführung* oder *Komposition* (engl. *composition*) von f und g.

Satz 1.

1. Die Verkettung injektiver Funktionen ist injektiv.
2. Die Verkettung surjektiver Funktionen ist surjektiv.
3. Die Verkettung bijektiver Funktionen ist bijektiv.

Beweis.

1. Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ injektive Funktionen und $h = g \circ f$.

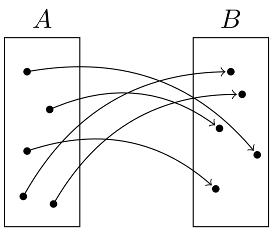
   Zu zeigen: h ist injektiv, also $\forall\ x_1, x_2 \in A : h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

   Seien also $x_1, x_2 \in A$ mit $h(x_1) = h(x_2)$, d. h. $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Da g nach Annahme injektiv ist, folgt zunächst $f(x_1) = f(x_2)$. Und daraus folgt, da nach Annahme auch f injektiv ist, $x_1 = x_2$, was zu zeigen war.

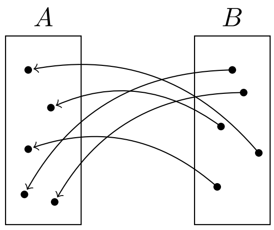
2., 3. Übung. ∎

Satz 2. $f\colon A \to B$ ist genau dann bijektiv, wenn es eine Funktion $g\colon B \to A$ gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$.
Diese Funktion g ist dann eindeutig bestimmt und ihrerseits bijektiv.

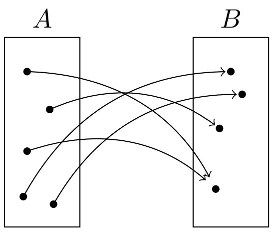
Dieser Satz besagt, dass eine Funktion genau dann bijektiv ist, wenn man durch umkehren der Abbildungsrichtung wieder eine Funktion bekommt. Man nennt die Funktion g deshalb auch die *Umkehrfunktion* oder *Inverse* (engl. *inverse*) von f, Notation: $f^{-1} := g$.



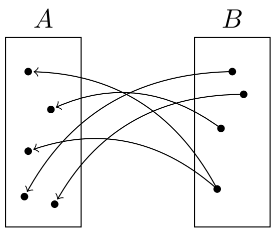
$f\colon A \to B$ ist bijektiv



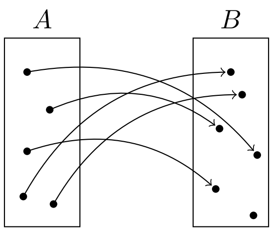
Umkehrfunktion $f^{-1}\colon B \to A$



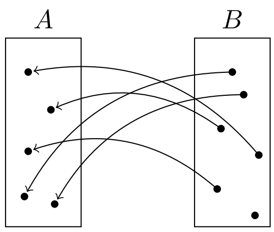
$f\colon A \to B$ ist nicht injektiv



Umkehrung ist keine Funktion!



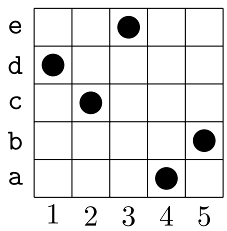
$f\colon A \to B$ ist nicht surjektiv

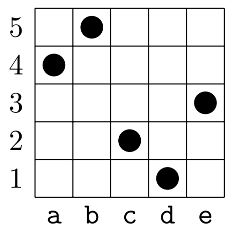


Umkehrung ist keine Funktion!

Beispiel.

1. Sei $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}\}$. Die unten links dargestellte Funktion $f\colon A \to B$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion $f^{-1}\colon B \to A$ (rechts dargestellt) ergibt sich durch Spiegelung der Tabelle an der Diagonalen.





Wenn A und B endliche Mengen sind, dann gibt es eine bijektive Funktion $f\colon A \to B$ offenbar genau dann wenn A und B gleich viele Elemente enthalten.

2. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x+1$ ist bijektiv. Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = 3y - 3$. In der Tat gilt $f^{-1}(f(x)) = 3(\frac{1}{3}x + 1) - 3 = x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ sowie $f(f^{-1}(y)) = \frac{1}{3}(3y - 3) + 1 = y$ für jedes $y \in \mathbb{R}$.

3. Dr. T. hat den idealen Kompressionsalgorithmus gefunden: er fasst die zu komprimierende (Binär-)Datei als Wort über dem Alphabet $\Omega = \{0, 1\}$ auf und wendet die Funktion $f\colon \Omega^* \to \Omega^*$, $f(\omega) = \epsilon$ an. Das Ergebnis könnte kürzer nicht sein. Am Dekompressionsalgorithmus arbeitet er noch.

   Er wird natürlich keinen finden, weil sein f nicht bijektiv ist. Die Kompressionsfunktion muss zumindest injektiv sein, damit eine Dekompression funktionieren kann, denn wenn es zwei Wörter $\omega_1 \neq \omega_2$ mit $f(\omega_1) = f(\omega_2)$ gibt, dann kann der Dekompressionsalgorithmus nicht wissen, ob er aus diesem Bild ω_1 oder ω_2 rekonstruieren soll.

   Surjektivität ist dagegen verzichtbar, denn wenn $f\colon \Omega^* \to \Omega^*$ zwar injektiv aber nicht surjektiv ist, dann kann man die modifizierte Funktion

   $$\begin{aligned} \tilde{f}\colon \Omega^* &\to B := \{f(\omega) : \omega \in \Omega^*\} \subseteq \Omega^* \\ \tilde{f}(\omega) &:= f(\omega) \end{aligned}$$

   betrachten. Diese ist bijektiv, hat also eine Umkehrfunktion $\tilde{f}\colon B \to \Omega^*$. Wir können damit ein gegebenes Wort $\chi \in \Omega^*$ wie folgt dekomprimieren:

   ```
   falls χ ∉ B
      Fehlermeldung „Dies ist keine komprimierte Datei“
   sonst
      gib f̃⁻¹(χ) zurück.
   ```

4 Relationen

Für ein einzelnes Objekt x kann man sich fragen, ob es eine bestimmte Eigenschaft hat oder nicht, d.h. formal ob es zu einer bestimmten Menge gehört oder nicht (nämlich zur Menge aller Elemente, die die fragliche Eigenschaft haben). Bei zwei Objekten x, y kann man sich fragen, ob sie zueinander in einer bestimmten Beziehung stehen. Ob das der Fall ist, wird im allgemeinen nicht allein von x und nicht allein von y abhängen, sondern ist vielmehr eine Eigenschaft des Paars (x, y). Das motiviert die folgende Definition:

Definition 6. Sei A eine Menge. Eine Teilmenge $R \subseteq A \times A$ heißt *Relation* (engl. *relation*) auf A. Statt $(x, y) \in R$ schreibt man $x\,R\,y$ und statt $(x, y) \notin R$ schreibt man $x \not R\ y$.

Beispiel.

1. $\leq$ ist eine Relation auf $\mathbb{Z}$. Es gilt zum Beispiel $-5 \leq 3$ und $8 \leq 9$, aber $3 \not\leq 1$.

2. Teilbarkeit (engl. *divisibility*): $A = \mathbb{Z}$, $| = \{\,(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists\, z \in \mathbb{Z} : xz = y\,\}$. Es gilt zum Beispiel $3 \mid 9$, $3 \nmid 10$, $5 \nmid 9$, $5 \nmid 10$.

3. Ist A eine Menge, so ist die Teilmengenbeziehung $\subseteq$ eine Relation auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$.

4. Sei Ω ein Alphabet. Ein Wort $\omega \in \Omega^*$ heißt *Teilwort* (engl. *subword*) eines anderen Worts $\chi \in \Omega^*$, falls es zwei weitere Wörter $\sigma, \rho \in \Omega^*$ gibt mit $\chi = \sigma \circ \omega \circ \rho$. Dann ist

   $$R := \{\,(\omega, \chi) \in \Omega^* : \omega \text{ ist ein Teilwort von } \chi\,\}$$

   eine Relation auf Ω^*.

5. Sei $\Omega = \{\texttt{a}, \texttt{A}, \texttt{b}, \texttt{B}, \dots, \texttt{z}, \texttt{Z}\}$. Dann ist
$$\leq_{\text{lex}} := \{\, (\omega, \chi) \in \Omega^* : \omega \text{ kommt lexikographisch vor } \chi \,\}$$
eine Relation auf Ω^*. Es gilt zum Beispiel $\texttt{Aachen} \leq_{\text{lex}} \texttt{Aal} \leq_{\text{lex}} \cdots \leq_{\text{lex}} \texttt{Zwickau}$.
Eine weitere Relation ist
$$\sim := \{\, (\omega, \chi) \in \Omega^* : \omega \text{ und } \chi \text{ unterscheiden sich nur durch Groß- und Kleinschreibung} \,\}.$$
Dabei gilt zum Beispiel $\texttt{wOrT} \sim \texttt{WoRt} \not\sim \texttt{trow}$.

6. Sei V die Menge aller Teilnehmer der Vorlesungsklausur und R die Menge aller $(x, y) \in V \times V$, so dass x und y dieselbe Note bekommen. Dann ist R eine Relation auf V.

7. Eine Relation auf der Menge M aller Menschen ist
$$\heartsuit := \{\, (x, y) \in M^2 : x \text{ mag } y \,\}.$$

8. Auf der Menge F aller Formeln ist die Implikation $\Rightarrow$ eine Relation.

Definition 7. Sei A eine Menge und $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf A. Man nennt R eine (partielle) *Ordnungsrelation* oder *Halbordnung* (engl. *order*), falls gilt:

1. $\forall\, x \in A : x \, R \, x$ (Reflexivität)
2. $\forall\, x, y \in A : x \, R \, y \wedge y \, R \, x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)
3. $\forall\, x, y, z \in A : x \, R \, y \wedge y \, R \, z \Rightarrow x \, R \, z$ (Transitivität)

Man spricht von einer *Totalordnung* (engl. *total order*), wenn außerdem gilt

4. $\forall\, x, y \in A : x \, R \, y \vee y \, R \, x$.

Beispiel.

1. $\leq$ ist eine Totalordnung auf $\mathbb{Z}$

2. $\leq_{\text{lex}}$ ist eine Totalordnung auf $\{\texttt{a}, \texttt{A}, \dots, \texttt{z}, \texttt{Z}\}^*$.
Die ist-Teilwort-von-Relation ist eine Halbordnung, aber keine Totalordnung.

3. $\subseteq$ ist eine Halbordnung auf $\mathcal{P}(A)$, aber im allgemeinen keine Totalordnung. Für $A = \{1, 2\}$ gilt zum Beispiel $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$ und $\{2\} \in \mathcal{P}(A)$, aber weder $\{1\} \subseteq \{2\}$ noch $\{2\} \subseteq \{1\}$.

4. $\mid$ ist eine Halbordnung auf $\mathbb{Z}$, aber keine Totalordnung, denn es gilt zum Beispiel sowohl $3 \nmid 5$ als auch $5 \nmid 3$.

5. Auf $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ wird eine Ordnung $\leq$ definiert durch
$$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) :\Longleftrightarrow a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2,$$
wobei mit $\leq$ auf der rechten Seite die übliche Ordnung auf $\mathbb{Z}$ gemeint ist.
Es gilt dann zum Beispiel $(3, 5) \leq (7, 8)$. Bei dieser Halbordnung handelt es sich nicht um eine Totalordnung, weil zum Beispiel die Elemente $(3, 7)$ und $(5, 3)$ nicht miteinander vergleichbar sind, d.h. es gilt weder $(3, 7) \leq (5, 3)$ noch $(5, 3) \leq (3, 7)$.

Definition 8. Sei A eine Menge und $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf A. Man nennt R eine *Äquivalenzrelation* (engl. *equivalence relation*), falls gilt:

1. $\forall\, x \in A : x\,R\,x$ (Reflexivität)
2. $\forall\, x, y \in A : x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$ (Symmetrie)
3. $\forall\, x, y, z \in A : x\,R\,y \wedge y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$ (Transitivität)

Beispiel.

1. Für jede Menge A ist die Gleichheitsrelation $=$ eine Äquivalenzrelation, denn für alle Objekte x, y, z gilt $x = x$ (Reflexivität), $x = y \iff y = x$ (Symmetrie) und $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$ (Transitivität).

   Im allgemeinen darf man sich eine Äquivalenzrelation vorstellen als eine abgeschwächte Variante der Gleichheitsrelation, bei der bestimmte irrelevante Eigenschaften ignoriert werden.

2. Sei $A = \{\square, \blacksquare, {\color{gray}\blacksquare}, \Box, \blacksquare, \circ, \bullet, \bullet, {\color{gray}\bullet}, \triangle, \blacktriangle, {\color{gray}\blacktriangle}, \triangle\}$. Man kann sich für diese Menge verschiedene Äquivalenzrelationen vorstellen. Hier sind ein paar Möglichkeiten:

   - $x \sim y$, falls x und y die gleiche Form haben – dann gilt z. B. $\square \sim \blacksquare$ und $\square \not\sim \circ$.
   - $x \sim y$, falls x und y die gleiche Farbe haben – dann gilt z. B. $\square \sim \circ$ und $\square \not\sim \blacksquare$.
   - $x \sim y$, falls x und y die gleiche Höhe haben – dann gilt z. B. $\square \sim \blacktriangle$ und $\square \not\sim \triangle$.
   - $x \sim y$, falls x und y sich höchstens in der Farbe unterscheiden – dann gilt z. B. $\square \sim \blacksquare$ und $\square \not\sim \bullet$.

3. Sei $\Omega = \{\mathtt{a}, \mathtt{A}, \mathtt{b}, \mathtt{B}, \ldots, \mathtt{z}, \mathtt{Z}\}$. Die Relation $\sim$ auf Ω^*, bei der $\omega \sim \chi$ gilt, wenn sich die Wörter nur durch Groß- und Kleinschreibung voneinander unterscheiden, ist eine Äquivalenzrelation.

4. Sei $m \in \mathbb{Z}$ und $\equiv_m := \{\, (x, y) \in \mathbb{Z}^2 : m \mid x - y \,\}$. Dann ist $\equiv_m$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$. Es gilt zum Beispiel:

$$\begin{array}{l} 0 \equiv_3 3 \equiv_3 6 \equiv_3 \;\; 9 \equiv_3 -3 \equiv_3 -6 \equiv_3 15 \equiv_3 \cdots \\ 1 \equiv_3 4 \equiv_3 7 \equiv_3 10 \equiv_3 -2 \equiv_3 -5 \equiv_3 16 \equiv_3 \cdots \\ 2 \equiv_3 5 \equiv_3 8 \equiv_3 11 \equiv_3 -1 \equiv_3 -4 \equiv_3 17 \equiv_3 \cdots \end{array}$$

5. Ist A die Menge aller Schüler einer Volksschule und

$$R = \{(x, y) \in A \times A : x \text{ und } y \text{ gehen in dieselbe Klasse}\},$$

   dann ist R eine Äquivalenzrelation auf A. Klassenbildung ist symptomatisch für Äquivalenzrelationen.

Definition 9. Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A und ist $x \in A$, so heißt

$$[x]_\sim := \{y \in A : x \sim y\}$$

die *Äquivalenzklasse* von x (bezüglich $\sim$). Man schreibt $A/{\sim} := \{\, [x]_\sim : x \in A \,\}$ für die Menge aller Äquivalenzklassen von Elementen von A.

Beispiel. Was sind bei den Äquivalenzrelationen aus dem vorherigen Beispiel die Äquivalenzklassen?

1. Bezüglich $=$ ist die Äquivalenzklasse eines Elementes $x \in A$ genau die Menge $\{x\}$, die nur dieses Element enthält.

2. Die genannten Äquivalenzrelationen auf $A = \{\square, \blacksquare, {\color{gray}\blacksquare}, {\large\square}, {\large\blacksquare}, \circ, \bullet, {\large\bullet}, {\color{gray}\large\bullet}, \vartriangle, \blacktriangle, {\color{gray}\blacktriangle}, \bigtriangleup\}$ teilen A in folgende Äquivalenzklassen auf:

   - gleiche Form: $\{\square, \blacksquare, {\color{gray}\blacksquare}, {\large\square}, {\large\blacksquare}\}$, $\{\circ, \bullet, {\large\bullet}, {\color{gray}\large\bullet}\}$, $\{\vartriangle, \blacktriangle, {\color{gray}\blacktriangle}, \bigtriangleup\}$
   - gleiche Farbe: $\{\square, {\large\square}, \circ, \vartriangle, \bigtriangleup\}$, $\{\blacksquare, {\large\blacksquare}, \bullet, {\large\bullet}, \blacktriangle\}$, $\{{\color{gray}\blacksquare}, {\color{gray}\large\bullet}, {\color{gray}\blacktriangle}\}$
   - gleiche Höhe: $\{\square, \blacksquare, {\color{gray}\blacksquare}, \circ, \vartriangle, \blacktriangle, {\color{gray}\blacktriangle}\}$, $\{{\large\square}, {\large\blacksquare}, {\large\bullet}, {\color{gray}\large\bullet}, \bigtriangleup\}$
   - gleich bis auf Farbe: $\{\square, \blacksquare, {\color{gray}\blacksquare}\}$, $\{{\large\square}, {\large\blacksquare}\}$, $\{\circ, \bullet\}$, $\{{\large\bullet}, {\color{gray}\large\bullet}\}$, $\{\vartriangle, \blacktriangle, {\color{gray}\blacktriangle}\}$, $\{\bigtriangleup\}$

3. Die Äquivalenzrelation $\sim$ auf Ω^* hat sehr viele Äquivalenzklassen. Ein Beispiel ist

   $$[\texttt{aBc}]_\sim = \{\texttt{abc}, \texttt{Abc}, \texttt{aBc}, \texttt{ABc}, \texttt{abC}, \texttt{AbC}, \texttt{aBC}, \texttt{ABC}\}.$$

   Eine weitere Äquivalenzklasse ist

   $$[\texttt{qM}]_\sim = \{\texttt{qm}, \texttt{qM}, \texttt{Qm}, \texttt{QM}\}.$$

   Die Äquivalenzklassen lassen sich auffassen als ein verallgemeinerter Typ von Wörtern, bei dem zwischen Groß- und Kleinschreibung nicht unterschieden wird. Es gilt zum Beispiel $[\texttt{aBc}]_\sim = [\texttt{AbC}]_\sim \neq [\texttt{qM}]_\sim$. Die Relation $\sim$ auf Ω^* entspricht der Relation $=$ auf $\Omega^*/{\sim}$.

4. Wir haben

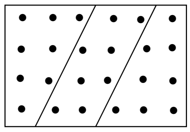
   $$\begin{aligned} [0]_{\equiv_3} &= \{\dots, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\} \\ [1]_{\equiv_3} &= \{\dots, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\} \\ [2]_{\equiv_3} &= \{\dots, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\} \\ [3]_{\equiv_3} &= [0]_{\equiv_3} \\ [4]_{\equiv_3} &= [1]_{\equiv_3} \end{aligned}$$

   und so weiter.

5. In diesem Fall sind die Äquivalenzklassen genau die Schulklassen.

Satz 3. Es seien A eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A, und $x, y \in A$. Dann gilt:

1. $x \sim y \iff [x]_\sim = [y]_\sim$
2. $x \not\sim y \iff [x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset$
3. $A = \bigcup_{C \in A/\sim} C$



Beweis.

1. „$\Rightarrow$“ Annahme $x \sim y$, zu zeigen: $[x]_\sim = [y]_\sim$.

   Aus Symmetriegründen genügt es, $[x]_\sim \subseteq [y]_\sim$ zu zeigen.

   Sei also $z \in [x]_\sim$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z \in [x]_\sim &\overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} x \sim z \\ &\overset{\text{Sym.}}{\Longrightarrow} z \sim x \\ &\overset{\text{Ann. + Trans.}}{\Longrightarrow} z \sim y \\ &\overset{\text{Sym.}}{\Longrightarrow} y \sim z \\ &\overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} z \in [y]_\sim. \end{aligned}$$

   „$\Leftarrow$“ Annahme: $[x]_\sim = [y]_\sim$, zu zeigen: $x \sim y$.

   Wegen Reflexivität gilt jedenfalls $x \in [x]_\sim$. Wegen $[x]_\sim = [y]_\sim$ also auch $y \in [x]_\sim$, und damit nach Definition auch $x \sim y$.

2. „$\Rightarrow$“ Annahme: $x \not\sim y$, zu zeigen: $[x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset$.

   Widerspruchsbeweis: wäre $[x]_\sim \cap [y]_\sim \neq \emptyset$, so gäbe es ein $z \in [x]_\sim \cap [y]_\sim$. Für dieses z gilt dann $z \sim x$ und $z \sim y$, also wegen Symmetrie und Transitivität auch $x \sim y$, im Widerspruch zur Annahme $x \not\sim y$.

   „$\Leftarrow$“ Annahme: $[x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset$, zu zeigen: $x \not\sim y$.

   Wäre $x \sim y$, dann wäre $[x]_\sim = [y]_\sim$ nach Teil 1, also $[x]_\sim \cap [y]_\sim = [x]_\sim \neq \emptyset$, da zumindest $x \in [x]_\sim$ (wegen Reflexivität). Damit ist $x \sim y$ ausgeschlossen und es bleibt nur $x \not\sim y$.

3. „$\subseteq$“ Sei $y \in A$. Zu zeigen: $y \in \bigcup_{[x]_\sim \in A/\sim} [x]_\sim$. Das folgt direkt aus $y \in [y]_\sim \in A/\sim$.

   „$\supseteq$“ Sei $y \in \bigcup_{[x]_\sim \in A/\sim} [x]_\sim$. Dann gibt es ein $[x]_\sim \in A/\sim$ mit $y \in [x]_\sim$. Wegen $[x]_\sim \subseteq A$ folgt $y \in A$. ∎

Seien A, B Mengen und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Um eine Funktion $h\colon A/\sim \to B$ zu definieren, ist es verlockend, zunächst von einer Funktion $\tilde{h}\colon A \to B$ auszugehen und dann zu sagen $h([x]_\sim) := \tilde{h}(x)$. Damit das funktioniert, muss man entweder präzisieren, auf welches Element x der Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ die Funktion $\tilde{h}$ angewendet werden soll, oder man muss sich vergewissern, dass die Wahl auf das Ergebnis keinen Einfluss hat. Im letzteren Fall sagt man, die Definition ist „repräsentantenunabhängig“, oder „die Funktion h ist wohldefiniert“.

Beispiel. Wir betrachten wieder das Alphabet $\Omega = \{\mathtt{a}, \mathtt{A}, \ldots, \mathtt{z}, \mathtt{Z}\}$ und die Äquivalenzrelation $\sim$, die Groß-/Kleinschreibung ignoriert.

1. Bei
$$h\colon \Omega^*/{\sim} \setminus \{[\epsilon]_\sim\} \to \Omega, \quad h([\omega]_\sim) := \text{erster Buchstabe von } \omega$$
handelt es sich **nicht** um eine gültige Definition, denn einerseits gilt $h([\mathtt{aB}]_\sim) = \mathtt{a}$, und andererseits gilt wegen $\mathtt{aB} \sim \mathtt{Ab}$ auch $[\mathtt{aB}]_\sim = [\mathtt{Ba}]_\sim$, und daher muss auch $h([\mathtt{aB}]_\sim) = h([\mathtt{Ab}]_\sim) = \mathtt{A} \neq \mathtt{a}$ gelten. Das kann nicht sein.

2. Bei $h\colon \Omega^*/{\sim} \to \mathbb{N}$, $h([\omega]_\sim) := |\omega|$ handelt es sich um eine gültige Definition, denn wann immer $\omega \sim \chi$ gilt, gilt auch $|\omega| = |\chi|$. Die Definition ist also repräsentantenunabhängig.

Satz 4. (Homomorphiesatz für Mengen) Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion.

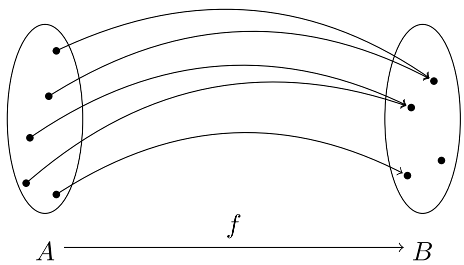
1. Durch $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ wird eine Äquivalenzrelation auf A definiert.

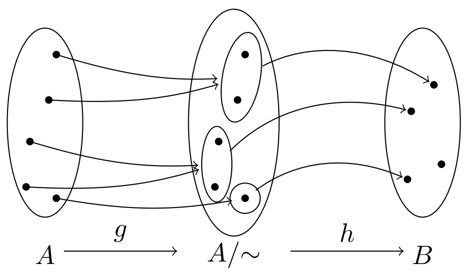
2. Die Funktion $g\colon A \to A/{\sim}$, $g(x) = [x]_\sim$ ist surjektiv.

3. Es gibt eine injektive Funktion $h\colon A/{\sim} \to B$ so dass $f = h \circ g$.

4. Diese Funktion h ist eindeutig bestimmt.

5. f ist genau dann surjektiv, wenn h bijektiv ist.





Beweis.

1., 2. Übung

3. Betrachte die Funktion $g\colon A \to A/{\sim}$ mit $g(x) = [x]_\sim$ für alle $x \in A$ und definiere die Funktion $h\colon A/{\sim} \to B$ durch $h([x]_\sim) = f(x)$. Diese Definition ist zulässig, weil $[x]_\sim = [y]_\sim \iff x \sim y \iff f(x) = f(y)$.

   h ist injektiv, denn wenn $[x]_\sim, [y]_\sim \in A/{\sim}$ so sind, dass $h([x]_\sim) = h([y]_\sim)$ gilt, dann $f(x) = f(y)$, und dann $x \sim y$, und dann $[x]_\sim = [y]_\sim$.

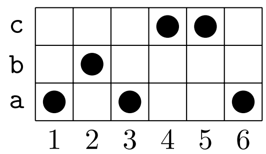
   Es gilt $f = h \circ g$, denn für alle $x \in A$ gilt $h(g(x)) = h([x]_\sim) = f(x)$.

4. Wenn $\bar h\colon A/{\sim} \to B$ eine andere Funktion mit $f = \bar h \circ g$ ist, müsste es ein $[x]_\sim \in A/{\sim}$ geben mit $h([x]_\sim) \neq \bar h([x]_\sim)$, obwohl doch $h([x]_\sim) = h(g(x)) = f(x) = \bar h(g(x)) = \bar h([x]_\sim)$ gelten soll.

5. Übung ■

Beispiel.

1. Seien $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ und sei f die folgende Funktion:

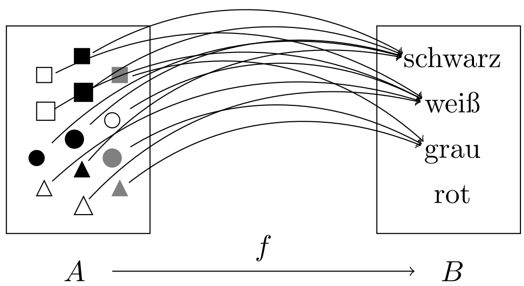
   

   Dann ist
   $$A/{\sim} = \big\{\{1,3,6\}, \{2\}, \{4,5\}\big\}.$$
   Die Funktionen g und h aus dem Satz sind gegeben durch

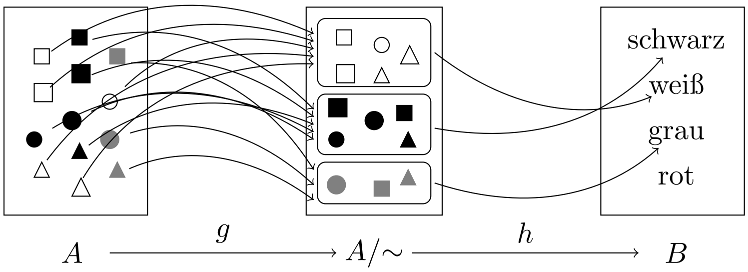
g:	1	2	3	4	5	6
	$\{1,3,6\}$	$\{2\}$	$\{1,3,6\}$	$\{4,5\}$	$\{4,5\}$	$\{1,3,6\}$

h:	$\{1,3,6\}$	$\{2\}$	$\{4,5\}$
	a	b	c

2. Seien $A = \{$□, ■, ■, □, ■, ○, ●, ●, ●, △, ▲, ▲, △$\}$, $B = \{\text{schwarz}, \text{weiß}, \text{grau}, \text{rot}\}$, und sei $f\colon A \to B$ die Funktion, die jedem Element aus A dessen Farbe zuordnet:

Die Zerlegung von f in $f = h \circ g$ sieht dann wie folgt aus:



5 Graphen

Definition 10. Sei V eine endliche Menge und $E \subseteq V \times V$ eine Relation auf V. Dann heißt $G = (V, E)$ ein *Graph* (engl. *graph*). Die Elemente von V heißen *Knoten* (engl. *vertex*) und jene von E heißen *Kanten* (engl. *edge*) von G.

Graphen kann man sich graphisch veranschaulichen, indem man für jeden Knoten einen Punkt in der Ebene wählt und für jede Kante (u, v) einen Pfeil vom Punkt, der u darstellt, zum Punkt, der v darstellt, zeichnet. Natürlich ist eine solche Darstellung nicht eindeutig.

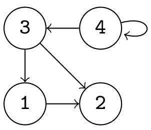
Wenn ein Graph $G = (V, E)$ so ist, dass für jedes $(u, v) \in E$ auch $(v, u) \in E$ ist, dann zeichnet man statt zweier Pfeile von u nach v und von v nach u einfach nur eine Verbindung ohne Pfeilspitzen. Man spricht in diesem Fall von einem *ungerichteten* (engl. *undirected*) Graph.

Beispiel.

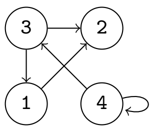
1. Zwei mögliche graphische Darstellungen des Graphen

$$G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 3), (4, 4)\})$$

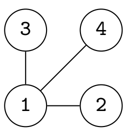
   sind



und



2. Der Graph $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1)\})$ ist ungerichtet und kann z.B. wie folgt visualisiert werden:



Abgesehen von dem Detail, dass wir V als endliche Menge voraussetzen, bezeichnet der Begriff Graph im wesentlichen dasselbe wie der Begriff Relation. Der neue Begriff ist also streng genommen überflüssig. Wir verwenden ihn hier trotzdem, um dem allgemeinen Sprachgebrauch Rechnung zu tragen.

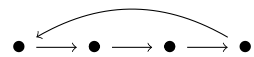
Man spricht typischerweise von einer Relation, wenn man Zusammenhänge zwischen bestimmten mathematischen Objekten (z.B. Rechengesetze für Zahlen) beschreiben will. Dagegen verwendet man den Begriff Graph, wenn nicht die mathematische Natur der Knoten im Vordergrund steht, sondern die wechselseitigen Beziehungen, die durch den Graph ausgedrückt wird.

Graphen spielen in der Informatik eine bedeutende Rolle, weil man mit ihnen Strukturen und Zusammenhänge modelieren kann.

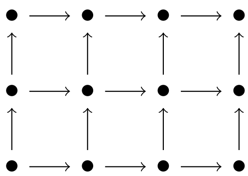
Beispiel.

1. Manche Graphen (oder Graphenfamilien) haben spezielle Namen. Dazu gehören:

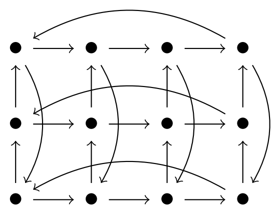
Kette (engl. *chain*)



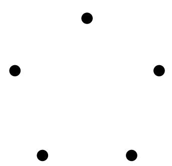
Zyklus (engl. *cycle*)



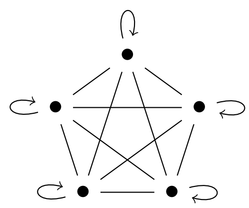
Gitter (engl. *grid*)



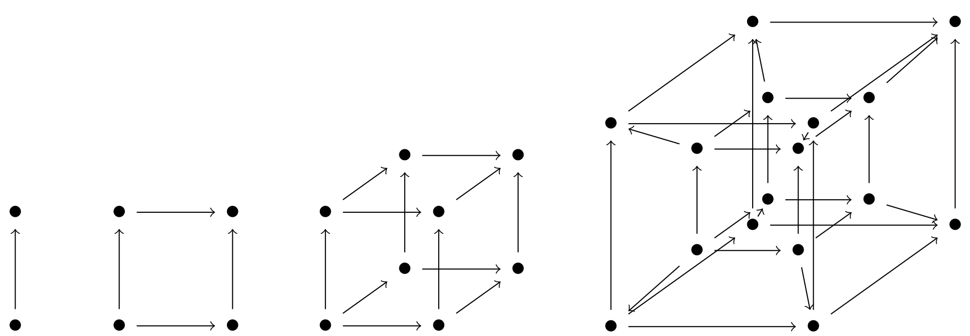
Torus (engl. *torus*)



leerer Graph



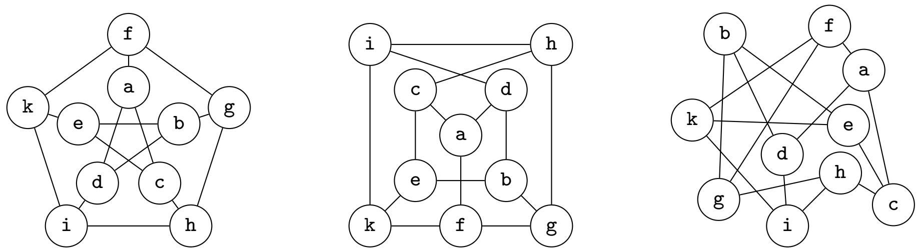
vollständiger Graph



1D 2D 3D 4D

Hyperkubus (engl. *hyper cube*)

2. Die folgenden drei Abbildungen stellen alle den gleichen Graphen dar (den sogenannten Petersen-Graph):



Wie man sieht, kann die Struktur eines Graphen mehr oder weniger deutlich mit dem Auge zu erkennen sein, je nach dem, wo man bei der Visualisierung seine Knoten positioniert.

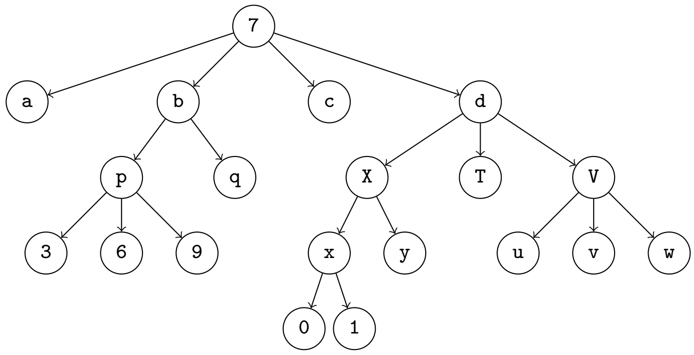
3. Eine besondere Familie von Graphen bilden die *Bäume* (engl. *tree*). Ein Graph ist ein Baum, wenn er sich durch wiederholte Anwendung der folgenden beiden Konstruktionsregeln bilden lässt:

   - Jeder Graph mit nur einem Knoten und keinen Kanten ist ein Baum. Der Knoten ist zugleich die *Wurzel* (engl. *root*) des Baums.
   - Wenn $T_1 = (V_1, E_1), \ldots, T_n = (V_n, E_n)$ Bäume sind mit $V_i \cap V_j = \emptyset$ für $i \neq j$, wenn $t_1 \in V_1, \ldots, t_n \in V_n$ die jeweiligen Wurzeln dieser Bäume sind, und wenn v ein Objekt mit $v \notin V_1 \cup \cdots \cup V_n$ ist, dann ist auch der Graph

     $$T = \Big(\underbrace{\{v\} \cup V_1 \cup \cdots \cup V_n}_{\text{Knoten}},\ \underbrace{\{(v, t_1), \ldots, (v, t_n)\} \cup E_1 \cup \cdots \cup E_n}_{\text{Kanten}} \Big)$$

     ein Baum. Seine Wurzel ist v.

   Der folgende Baum hat die Wurzel `7`, sowie vier *Unterbäume* (engl. *subtree*). Die Wurzeln dieser Unterbäume sind `a`, `b`, `c`, `d`. Der Unterbraum mit der Wurzel `d` hat seinerseits wieder drei Unterbäume, deren Wurzeln sind `X`, `T`, `V`. Die Knoten v, für die es eine Kante (u, v) im Baum gibt, nennt man die *Kinder* (engl. *child*) von u. Die Kinder von `d` sind `X`, `T`, `V`. Die Knoten, die keine Kinder haben, nennt man *Blätter* (engl. *leaf*). Im Beispiel sind dies `a`, `3`, `6`, `9`, `q`, `c`, `0`, `1`, `y`, `T`, `u`, `v`, `w`. Die Knoten, die keine Blätter sind, nennt man die *inneren Knoten* des Baums.

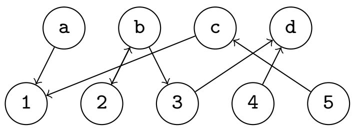


   Dateisysteme werden typischerweise als Bäume organisiert. Darin sind Verzeichnisse und Dateien die Knoten, und a ist ein Kind von b wenn a in b liegt. Verzeichnisse die inneren Knoten und Dateien sind die Blätter des Baums.

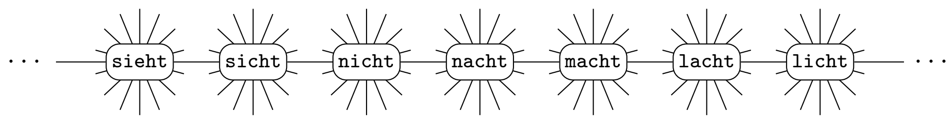
Auch in graphischen Benutzeroberflächen findet man Baumstrukturen, z.B. Menüs mit verschachtelten Untermenüs.

4. Ein Theaterstück hat verschiedene Szenen und verschiedene Figuren. Man kann den Graph betrachten, dessen Knoten die Szenen und Figuren des Stücks sind, und bei dem eine Kante von Figur a zu Szene b geht, wenn a in b auftritt.

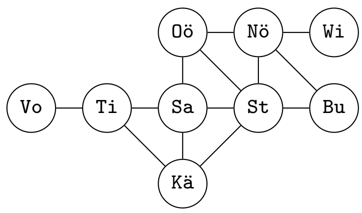
   Einen solchen Graphen nennt man *bipartit* (engl. *bipartite*). Die charakteristische Eigenschaft eines bipartiten Graphen $G = (V, E)$ ist, dass sich die Knotenmenge so in $V = V_1 \cup V_2$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ zerlegen lässt, dass jede Kante $(u, v) \in E$ einen Knoten einer der beiden Teilmengen mit einem Knoten aus der anderen verbindet. Es muss also $E \cap (V_1 \times V_1) = E \cap (V_2 \times V_2) = \emptyset$ gelten.



5. Die Menge aller deutschen Wörter mit fünf Buchstaben wird zu einem Graphen, wenn man definiert, dass zwischen zwei Wörtern a und b genau dann eine Kante ist, wenn a und b sich in genau einem Buchstaben unterscheiden. Es ist zweckmäßig, nicht zwischen Groß- und Kleinschreibung zu unterscheiden. Hier ist ein kleiner Ausschnitt dieses Graphen (die Strahlen sollen andeuten, dass die dargestellten Knoten noch mit vielen weiteren nicht dargestellten Knoten verbunden sind):



6. Die Menge der österreichischen Bundesländer kann man als Graph auffassen. Eine Kante von a nach b könnte angeben, dass a und b eine gemeinsame Grenze haben.



7. Die Struktur chemischer Moleküle kann man durch einen Graphen beschreiben. Dabei entsprechen die Knoten den Atomen und die Bindungen den Kanten.

8. Das WWW ist ein Graph, bei dem Webseiten die Knoten sind, und eine Kante von a nach b existiert, wenn die Seite a einen Link auf die Seite b enthält.

9. Die Menge der Klausurteilnehmer kann man als Graph auffassen. Eine Kante von a nach b könnte angeben, dass a von b abgeschrieben hat.

10. Die Menge aller Menschen kann man auf vielerlei Weise als Graph auffassen. Eine Kante von a nach b könnte z. B. bedeuten, dass a und b sich einmal die Hand gegeben haben ("*handshake graph*").

11. Die Menge der Lehrveranstaltungen, die an einer Universität angeboten werden, kann man als Graph auffassen. Eine Kante von a nach b könnte angeben, dass der erfolgreiche Abschluss von a eine Voraussetzung für den Besuch von b ist.

12. Ein Kommunikationsnetzwerk ist ein Graph. Dabei sind die beteiligten Geräte (Mobiltelefone, Handymasten, Satelliten, etc.) die Knoten, und es gibt eine Kante von a nach b, wenn a eine direkte Verbindung zu b hat.

13. Das menschliche Skellet lässt sich durch einen Graph beschreiben, bei dem die Gelenke die Knoten darstellen und zwischen zwei Knoten eine Kante besteht, wenn die entsprechenden Gelenke durch einen Knochen verbunden sind.

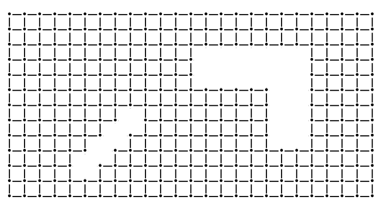
14. Das Schachspiel ist ein Graph, bei dem die Knoten die möglichen Belegungen des Schachbretts mit Figuren sind, und eine Kante von a nach b existiert, wenn ein zulässiger Schachzug die Stellung a in die Stellung b überführt.

15. Ein Softwaresystem kann man als Graph auffassen. Dabei sind die Funktionen die Knoten und es besteht eine Kante von a nach b, wenn die Definition von a einen Aufruf der Funktion b enthält.

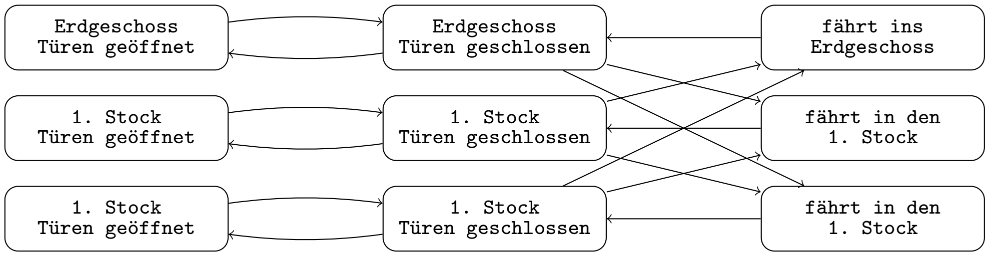
16. Ein Schaltkreis ist in natürlicher Weise ein Graph. Dabei sind die Bauelemente die Knoten und es gibt eine Kante von a nach b, wenn die Bauteile durch eine Leitung verbunden sind.

17. Das Straßennetz ist ein Graph. Hierbei sind die Knoten alle Kreuzungen und Einmündungen, und es besteht eine Kante von a nach b, wenn man von a nach b fahren kann, ohne dabei an einer weiterer Kreuzung oder Einmündung vorbeizukommen.

18. Ein Roboter soll ich auf einem freien Feld von einen Punkt zu einem anderen bewegen und dabei Hindernissen, die sich auf dem Feld befinden, ausweichen. Um ein solches Feld mit Hindernissen zu modellieren, kann man das Feld durch ein feines Gitter modellieren („diskretisieren"), und die Gitterpunkte, an denen sich Hindernisse befinden, aus dem Gitter löschen. Die übrigen Gitterpunkte bilden die Knoten, und je zwei benachbarte Knoten sind durch eine Kante verbunden. Der Roboter kann sich dann entlang der Kanten des Graphen bewegen.



19. Auch Verhalten kann sich unter Umständen durch Graphen beschreiben lassen. Die Knoten bezeichnen dann *Zustände* (engl. *state*), und es gibt eine Kante von a nach b, wenn das System vom Zustand a in den Zustand b welchseln kann. Zum Beispiel zur Beschreibung eines Aufzugs genügt ein solcher Graph:

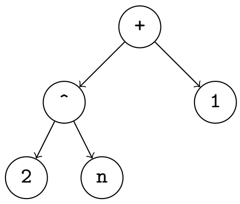


Je nach Anwendung kann es sinnvoll sein, Graphen mit weiteren Informationen anzureichern. Das ist auf mehrere Weise möglich. Wir beschränken uns hier auf zwei Beispiele.

1. *Orientierter Graphen.* Ist $G = (V, E)$ ein Graph, so kann man für jeden Knoten $v \in V$ die Menge $\{ u \in V : (v, u) \in E \}$ aller Knoten betrachten, zu denen von v aus eine Kante führt. Auf dieser Menge kann man eine Ordnung definieren, so dass es Sinn macht, z.B. vom „dritten“ dieser Knoten zu sprechen. Die folgenden beiden Bäume sind z.B. identisch als gewöhnliche Graphen, aber verschieden als orientierte Graphen:

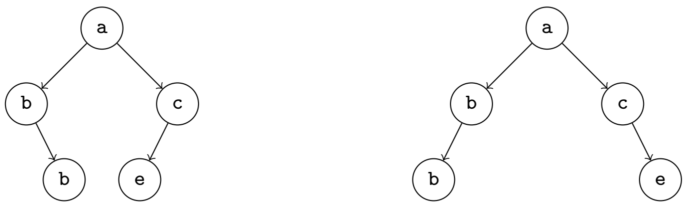
   

   Besonders bei Bäumen ist es oft sinnvoll, den Kindern eines Knotens eine Reihenfolge zuzuweisen. Die Reihenfolge der Kinder ist zum Beispiel relevant, wenn man die syntaktische Struktur eines mathematischen Ausdrucks mit einem Baumen darstellen will. Dass zum Beispiel der folgende Baum den Ausdruck $2^n + 1$ darstellen soll, weiss man nur dann, wenn man bei den Kindern des Kontens ^ weiss, welcher das erste und welcher das zweite ist.

   Jeder mathematische Ausdruck lässt sich auf diese Weise als Baum darstellen. Man spricht vom *Syntaxbaum* (engl. *syntax tree*) des Ausdrucks.

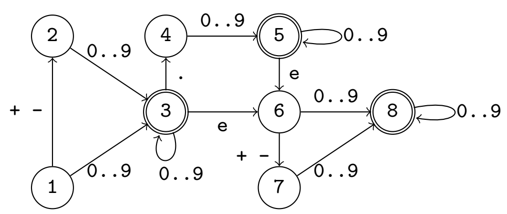
   Eine ähnliche Variante sind *Binärbäume* (engl. *binary tree*). Das sind Bäume, bei denen jeder Knoten höchstens zwei Kinder hat, und zwar höchstens einen „linken“ und höchstens einen „rechten“. Die folgenden Binärbäume werden also als verschieden aufgefasst:

   Binärbäume werden vor allem dazu verwendet, Daten so zu organisieren, dass man effizient darin suchen kann.

2. *Gewichtete und Gelabelte Graphen.* Bei einem gewichteten Graphen gibt es zusätzlich zu V und E eine Funktion $w\colon E \to X$, die jeder Kante $e \in E$ eine Zusatzinformation $w(e) \in X$ zuordnet. In einem Graphen, der ein Straßennetz codiert (mit Kreuzungen und Einmündungen als Knoten, s.o.), könnte eine solche Zusatzinformation zum Beispiel angeben, wie weit die Endpunkte u, v einer Kante $(u, v) \in E$ voneinander entfernt sind, oder wie lange man durchschnittlich braucht, um diese Entfernung mit dem Auto zurückzulegen.

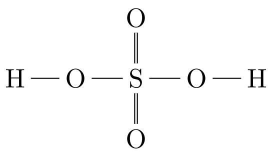
   Im Fall $X = \mathbb{N}$ kann man das Gewicht $w(e)$ einer Kante $e = (u, v) \in E$ auch so interpretieren, dass zwischen u und v nicht nur eine, sonder $w(e)$ viele Kanten existieren sollen. Man spricht dann auch von einem *Multigraph*. Die Menge X der Gewichte muss aber nicht unbedingt eine Menge von Zahlen sein. Zum Beispiel verwendet man Teilmengen eines Alphabets Ω als Gewichte (also $X = \mathcal{P}(\Omega)$) bei Graphen, mit denen man definiert, welche Wörter für einen bestimmten Zweck zulässig sein sollen. Der folgende Graph definiert zum Beispiel, welche Wörter über dem Alphabet $\{\texttt{0}, \ldots, \texttt{9}, \texttt{+}, \texttt{-}, \texttt{e}, \texttt{.}\}$ zulässige Gleitkommazahlen sind. Der Graph ist wie folgt zu lesen: Beginnend im Knoten 1 (dem *Startzustand* (engl. *initial state*)) liest man das zu prüfende Wort Buchstabe für Buchstabe und folgt dabei in jedem Schritt einer Kante, die mit einer Buchstabenmenge gewichtet ist, die den aktuellen Buchstaben enthält. Das Wort ist zulässig, wenn es möglich ist, auf diese Weise am Ende des Wortes in einem doppelt umrandeten Knoten (einem *Endzustand* (engl. *final state*)) anzukommen. Zum Beispiel ist `3.5703e-20` ein gültiges Wort (man besucht dabei nacheinander die Zustände $1, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 7, 8, 8$). Dagegen ist `3.-e5.+` kein gültiges Wort.

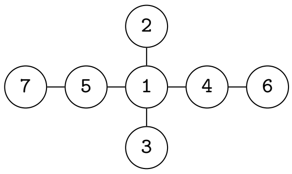
   

   Die oben beschriebene Anwendung eines Graphen zur Unterscheidung von gültigen und ungültigen Wörtern bezeichnet man als *endlichen Automat* (engl. *finite automaton*), ein Begriff aus der Theorie der formalen Sprachen, über die Sie mehr in Vorlesungen über theoretische Informatik oder Compilerbau erfahren.

   Von einem *gelabelten Graph* spricht man, wenn es zusätzlich zur Knotenmenge V und zur Kantenmenge E eine Funktion $q\colon V \to Y$ gibt, die jedem Knoten v ein Label $q(v) \in Y$ zuordnet. Natürlich kann ein Graph sowohl gewichtet als auch gelabelt sein. Ein Beispiel ist der endliche Automat von vorher, wenn man mit den Labels markiert, welche Zustände Endzustände sein sollen (im obigen Fall: $q\colon \{1, \ldots, 8\} \to \{\text{final}, \text{non-final}\}$, $q(v) = \text{final}$ für $v \in \{3, 5, 8\}$ und $q(v) = \text{non-final}$ für $v \in \{1, 2, 4, 6, 7\}$).

   Labels braucht man vor allem dann, wenn man verschiedene Knoten gleich bezeichnen will. Ein Beispiel ist die Beschreibung von Molekülen durch Graphen. Um zum Beispiel die Schwefelsäure (unten links) darzustellen, kann man nicht einfach die Knotenmenge $\{\mathrm{S}, \mathrm{O}, \mathrm{O}, \mathrm{O}, \mathrm{O}, \mathrm{H}, \mathrm{H}\}$ nehmen, weil diese Menge identisch ist mit der Menge $\{\mathrm{S}, \mathrm{O}, \mathrm{H}\}$, und drei Knoten genügen uns nicht. Stattdessen nimmt man als Knotenmenge $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und weist diesen Knoten die entsprechenden chemischen Elemente als Labels zu: $q\colon V \to \{\mathrm{S}, \mathrm{O}, \mathrm{H}\}$, $q(1) = \mathrm{S}$, $q(2) = q(3) = q(4) = q(5) = \mathrm{O}$, $q(6) = q(7) = \mathrm{H}$. Darüber hinaus kann man die Mehrfachbindungen des Moleküls durch gewichtete Kanten darstellen: $w\colon E \to \mathbb{N}$, $w((1, 2)) = w((2, 1)) = w((1, 3)) = w((3, 1)) = 2$ und $w((u, v)) = 1$ für alle anderen Kanten $(u, v) \in E$.



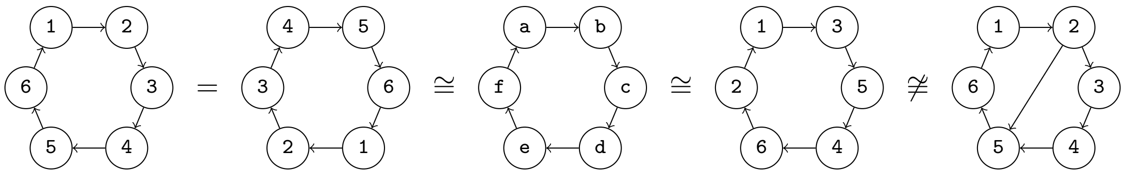


Für die *Struktur* eines Graphen ist es unerheblich, wie seine Knoten bezeichnet sind. Man bezeichnet zwei Graphen $G = (V, E)$ und $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ als *isomorph* (aus dem Griechischen für „von gleicher Gestalt"), wenn es eine bijektive Funktion $h\colon V \to \tilde{V}$ gibt, so dass gilt

$$\forall\, u, v \in V : (u, v) \in E \iff (h(u), h(v)) \in \tilde{E}.$$

In diesem Fall schreibt man $G \cong \tilde{G}$.

Beispiel.



Der zweite und der dritte Graph sind nicht identisch sondern (nur) isomorph. Auch der zweite und der vierte Graph sind (nur) isomorph und nicht identisch.

Allgemeiner:

Definition 11. Seien $G = (V, E)$ und $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ zwei Graphen.

1. Eine (nicht notwendigerweise bijektive) Funktion $h\colon V \to \tilde{V}$ heißt *(Graphen-)Homomorphismus* (engl. *graph homomorphism*) von G nach $\tilde{G}$, falls gilt

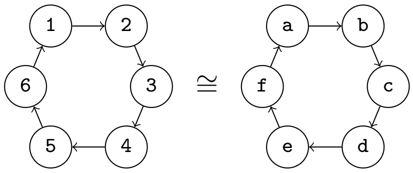
   $$\forall\, u, v \in V : (u, v) \in E \Rightarrow (h(u), h(v)) \in \tilde{E}.$$

2. G und $\tilde{G}$ heißen (zueinander) *isomorph* (engl. *isomorphic*), falls es einen bijektiven Graphenhomomorphismus $h\colon V \to \tilde{V}$ gibt, dessen Umkehrfunktion $h^{-1}\colon \tilde{V} \to V$ ebenfalls ein Graphenhomomorphismus ist. Einen solchen Graphenhomomorphismus h nennt man dann *Graphenisomorphismus* für G und $\tilde{G}$.

3. G heißt *Teilgraph* oder *Untergraph* (engl. *subgraph*) von $\tilde{G}$, falls es einen injektiven Graphenhomomorphismus von G nach $\tilde{G}$ gibt. Einen solchen Graphenhomomorphismus nennt man auch *Einbettung* (engl. *embedding*) von G in $\tilde{G}$.

Beispiel.

1. Im Beispiel

   ist ein Isomorphismus gegeben durch die Funktion $h\colon \{1, \ldots, 6\} \to \{\mathtt{a}, \ldots, \mathtt{f}\}$ mit folgender Wertetabelle:

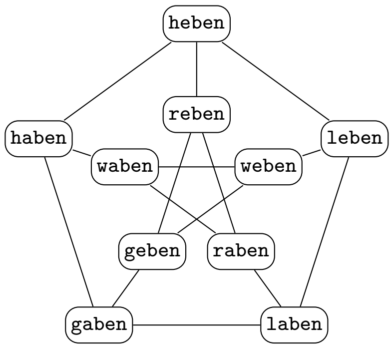
v	1	2	3	4	5	6
$h(v)$	a	b	c	d	e	f

Der Isomorphismus für zwei isomorphe Graphen ist im allgemeinen nicht eindeutig. Im vorliegenden Fall ist zum Beispiel auch die Funktion $\tilde{h}\colon \{1, \ldots, 6\} \to \{\mathtt{a}, \ldots, \mathtt{f}\}$ mit

v	1	2	3	4	5	6
$\tilde{h}(v)$	c	d	e	f	a	b

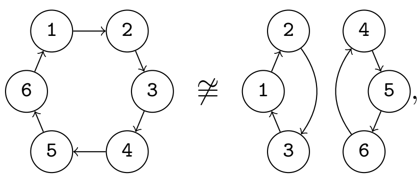
ein Isomorphismus.

2. Sei G der Petersen Graph und $\tilde{G}$ der Graph, dessen Knoten die deutschen Wörter mit exakt fünf Buchstaben (ohne Unterscheidung von Groß- und Kleinschreibung) und der eine Kante von a nach b hat, wenn a und b sich an genau einer Stelle unterscheiden. Dann ist G ein Untergraph von $\tilde{G}$:



Gemäß unserer Definition macht es nichts aus, wenn es außer den erforderlichen Kanten noch weitere gibt, zum Beispiel die Kante von `gaben` zu `waben`.

3. Anfänger glauben oft, dass zwei Graphen $G = (V, E)$ und $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ dann isomorph sind, wenn sie die gleiche Anzahl von Knoten und Kanten haben, und in beiden Graphen die Zahl der Knoten mit einander entsprechender Anzahl von eingehenden bzw. abgehenden Kanten übereinstimmen. Das ist aber **falsch.** Zum Beispiel gilt sicher



obwohl beide Graphen sechs Knoten und sechs Kanten haben, und in beiden Graphen jeder Knoten genau eine eingehende und genau eine ausgehende Kante hat.

Definition 12. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

1. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ heißt der Graph $P = (\{1, \ldots, n\}, \{(1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n)\})$ eine *Kette* der Länge n.

2. Sei P eine Kette der Länge n und $h \colon \{1, \ldots, n\}$ ein Graphhomomorphismus von P nach G. Dann heißt $(h(1), h(2), \ldots, h(n))$ ein *Pfad* (engl. *path*) in G der Länge n von $h(1)$ nach $h(2)$. Gilt außerdem $h(n) = h(1)$, so spricht man von einem *geschlossenen* Pfad (engl. *closed path*) oder *Zyklus* (engl. *cycle*).

3. Ein Knoten $q \in V$ heißt *Quelle* (engl. *source*) von G, falls für jedes $v \in V$ ein Pfad von q nach v existiert.

4. Ein Knoten $s \in V$ heißt *Senke* (engl. *sink*) von G, falls für jedes $v \in V$ ein Pfad von v nach s existiert.

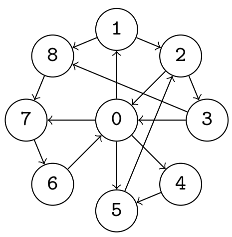
Sei G nun ein ungerichteter Graph (d.h. es gelte $\forall\ (u, v) \in E : (v, u) \in E$).

4. G heißt *zusammenhängend* (engl. *connected*), falls für je zwei Knoten $v, w \in V$ ein Pfad von v nach w existiert.

5. Sei $V_0 \subseteq V$ nicht leer und $E_0 = \{\, (u, v) \in E : u, v \in V_0 \,\} \subseteq E$. Der Graph $G_0 := (V_0, E_0)$ heißt *Zusammenhangskomponente* (engl. *connected component*) von G, falls G_0 zusammenhängend ist und für alle $v \in V \setminus V_0$ und alle $w \in V_0$ gilt $(v, w) \notin E$.

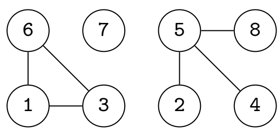
Beispiel.

1. Im Graphen



ist jeder Knoten sowohl Quelle als auch Senke. Ein Pfad von `1` nach `5` ist zum Beispiel $(\mathtt{1}, \mathtt{2}, \mathtt{0}, \mathtt{7}, \mathtt{6}, \mathtt{0}, \mathtt{4}, \mathtt{5})$. Beachten Sie, dass ein Pfad einen Knoten auch mehrfach besuchen darf, weil die Definition nicht verlangt, dass der Homomorphismus injektiv ist. Bei $(\mathtt{1}, \mathtt{2}, \mathtt{0}, \mathtt{6}, \mathtt{0}, \mathtt{4}, \mathtt{5})$ handelt es sich **nicht** um einen Pfad des Graphen, weil der Graph eine Kante von `0` nach `6` hat.

2. Der ungerichtete Graph



hat drei Zusammenhangskomponenten, nämlich

$$(\{1,3,6\},\{(1,3),(3,1),(3,6),(6,3),(1,6),(6,1)\}),$$
$$(\{2,4,5,8\},\{(2,5),(5,2),(4,5),(5,4),(5,8),(8,5)\})$$

und $(\{7\},\emptyset)$.

Satz 5. Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph. Dann gilt: E ist genau dann eine Äquivalenzrelation auf V, wenn alle Zusammenhangskomponenten von G vollständige Graphen sind (d.h. zwischen je zwei Knoten derselben Zusammenhangskomponente gibt es eine Kante).

Beweis. „$\Rightarrow$“ E ist eine Äquivalenzrelation. Zu zeigen: die Zusammenhangskomponenten von G sind vollständig.

Sei (V_0,E_0) eine beliebige Zusammenhangskomponente. Dann ist also zu zeigen: $E_0=V_0\times V_0$, d.h. $\forall\, u,v\in V_0:(u,v)\in E_0$.

Betrachte dazu zwei beliebige Knoten $u,v\in V_0$. Da (V_0,E_0) als Zusammenhangskomponente insbesondere zusammenhängend ist, gibt es einen Pfad von u nach v, etwa

$$(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n)$$

mit $x_1=u$ und $x_n=v$. Nach Voraussetzung ist E eine Äquivalenzrelation, darum ist E insbesondere transitiv. Aus $(x_i,x_{i+1}),(x_{i+1},x_{i+2})\in E$ folgt deshalb $(x_i,x_{i+2})\in E$ ($i=1,\ldots,n-2$ beliebig). Mit der zweiten Bedingung aus der Definition der Zusammenhangskomponente folgt dann auch $(x_i,x_{i+2})\in E_0$. Man kann also die beiden Kanten (x_i,x_{i+1}) und (x_i,x_{i+1}) des Pfades durch die einzelne Kante (x_i,x_{i+2}) ersetzen und erhält so einen kürzeren Pfad von u nach v. Durch wiederholte Anwendung des Arguments erhält man nach endlich vielen Schritten einen Pfad bestehend aus nur einer Kante: (u,v). Damit ist gezeigt: für beliebige $u,v\in V_0$ gilt $(u,v)\in E_0$, wie gefordert.

„$\Leftarrow$“ Die Zusammenhangskomponenten von G sind vollständig. Zu zeigen: E ist eine Äquivalenzrelation auf V.

a) Symmetrie ist klar, weil G nach Voraussetzung ein ungerichteter Graph ist.

b) Transitivität: Wenn $a,b,c\in V$ so sind, dass $(a,b),(b,c)\in E$ sind, dann gibt es einen Pfad von a nach c, d.h. a und c liegen in derselben Zusammenhangskomponente. Nach Voraussetzung ist jede Zusammenhangskomponente vollständig. Die Zusammenhangskomponente, zu der a und c gehören, muss also die Kante (a,c) enthalten. Diese Kante muss dann auch schon zu E gehören. Damit ist gezeigt: $\forall\, a,b,c\in V:(a,b)\in E\wedge(b,c)\in E\Rightarrow(a,c)\in E$, wie gefordert.

c) Reflexivität: Jeder Knoten $v\in V$ gehört zu einer bestimmten Zusammenhangskomponente, etwa zu (V_0,E_0). Aus der Vollständigkeit dieser Zusammenhangskomponente folgt $(v,v)\in E_0\subseteq E$, wie gefordert. ■

Im Fall des obigen Satzes entsprechen die Zusammenhangskomponenten des Graphen den Äquivalenzklassen.

Zur Darstellung eines Graphen $G=(V,E)$ in einem Computer gibt es mehrere Möglichkeiten.

1. Man kann wie in der Definition die Knotenmenge V und die Kantenmenge E mit Hilfe geigneter Datenstrukturen für endliche Mengen abspeichern.

   Zum Beispiel $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\})$.

   Diese Repräsentation ist zum Programmieren meistens nicht die beste Wahl. Sie eignet sich eher für theoretische Überlegungen.

2. Man kann auch die Knotenmenge in einer geordneten Liste abspeichern und die Kantemenge als eine quadratische Tabelle mit $|V|$ Zeilen und $|V|$ Spalten, bei der in Zeile (i, j) eine 1 steht, wenn es eine Kante vom $i$ten Knoten zum $j$ten Knoten gibt, und sonst 0.

   Zum Beispiel $[1, 2, 3, 4]$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Diese Repräsentation bietet sich vor allem bei sehr kleinen Graphen an.

3. Stattdessen kann man auch eine Liste von Paaren (v, S) speichern, wobei v ein Knoten ist und $S \subseteq V$ die Menge aller Knoten $w \in V$, so dass $(v, w) \in E$ ist. Die Liste muss für jeden Knoten $v \in V$ ein solches Paar enthalten.

   Zum Beispiel $[(1, \{2\}), (2, \{\}), (3, \{1, 2\}), (4, \{1\})]$.

   Diese Repräsentation hat den Vorteil, dass man den Graphen relativ einfach modifizieren kann (z.B. zusätzliche Knoten oder Kanten hinzufügen).

4. Bei sehr großen Graphen, die nicht auf einmal in den Speicher passen, kann unter Umständen auch eine implizite Repräsentation sinnvoll sein. Dabei programmiert man z.B. eine Funktion is_vertex(_), die für jedes Objekt angibt, ob es zur Knotenmenge gehört oder nicht, sowie eine Funktion is_edge(_,_), die für je zwei gegebene Objekte angibt, ob es sich um Knoten handelt, die durch eine Kante des Graphen verbunden sind. Der Graph ist dabei gewissermaßen im Programm codiert.

Für den folgenden Algorithmus, mit dem man herausfinden kann, ob zwei gegebene Knoten eines Graphen durch einen Pfad verbunden sind, verwendet man am besten die zweite oder dritte Datenstruktur.

INPUT: $G = (V, E)$, $u, v \in V$
OUTPUT: Ein Pfad von u nach v, falls es einen gibt, oder False, falls nicht.

1 falls $u = v$, gib den leeren Pfad als Ergebnis zurück und stop.
2 markiere den Knoten u als „besucht“.
3 für alle Knoten $w \in V$:
4   falls $(u, w) \in E$ und w ist noch nicht markiert:
5   suche einen Pfad von w nach v, indem dieser Algorithmus rekursiv aufgerufen wird.
6   falls ein Pfad $(w, \dots, v)$ gefunden wurde:
7   gib $(u, w, \dots, v)$ als Ergebnis zurück und stop.
8 gib False zurück.

Beachten Sie, dass dieser Algorithmus in Schritt 6 sich selbst aufruft. Sie sollten sich zur Übung überlegen, (a) warum der Algorithmus nur korrekte Ergebnisse liefert, und (b) warum der Algorithmus für jede mögliche Eingabe terminiert. Können Sie den jeweiligen Grund als formalen Beweis formulieren?

Es gibt clevere Varianten dieses Algorithmus, die mit nur geringem Mehraufwand den kürzesten Pfad in einem gewichteten Graph finden. Dabei sind die Gewichte positive reelle Zahlen und die Länge eines Pfades ist die Summe der Gewichte der in ihm enthaltenen Kanten. Mit etwas mehr Aufwand kann man sogar die kürzeste Verbindung für alle Knotenpaare auf einmal ausrechnen. Es gibt viele weitere interessante Algorithmen, mit denen man Fragestellungen über Graphen effizient lösen kann. Allerdings ist z.B. kein effizienter Algorithmus bekannt, mit dem man herausfinden könnte, ob ein Graph einen sogenannten hamiltonschen Pfad hat. Das ist ein Pfad, der jeden Knoten des Graphen genau einmal besucht. Es wird vermutet, dass es zur Lösung dieses Problems keinen effizienten Algorithmus gibt (wobei wir an dieser Stelle nicht erklären können, was genau in diesem Zusammenhang mit einem „effizienten Algorithmus“ gemeint ist). Auch zur Entscheidung der Graphisomorphie gibt es nach derzeitigem Kenntnisstand keine effizienten Algorithmen.

6 Gruppen

Definition 13.

1. Sei $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine Menge mit n Elementen. Eine bijektive Funktion $f\colon X \to X$ heißt *Permutation* (engl. *permutation*) der Menge X. Man verwendet die Notation

$$f = \left(\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) \end{array} \right).$$

Die Menge aller Permutationen der Menge X wird mit S_X bezeichnet. Im Fall $X = \{1, \dots, n\}$ schreibt man auch einfach S_n statt $S_{\{1,\dots,n\}}$.

2. Eine Permutation $\pi \in S_n$ heißt *Zyklus* (engl. *cycle*), falls es paarweise verschiedene $k_1, \dots, k_m \in \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass

$$\pi(k_1) = k_2, \quad \pi(k_2) = k_3, \quad \dots, \quad \pi(k_{m-1}) = k_m, \quad \pi(k_m) = k_1$$

sowie $\pi(k) = k$ für alle $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k_1, \dots, k_m\}$ gilt.

Schreibweise: $\pi = (k_1\ k_2\ \dots\ k_m)$. Man nennt m die *Länge* (engl. *length*) des Zyklus.

Ein Zyklus der Länge zwei heißt *Transposition* (engl. *transposition*).

3. Zwei Permutationen π_1, π_2 heißen (zueinander) *disjunkt* (engl. *disjoint*) falls gilt

$$\forall\ k \in \{1, \dots, n\} : \pi_1(k) = k \vee \pi_2(k) = k.$$

4. Ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $\pi(k) = k$ heißt *Fixpunkt* (engl. *fixed point*) von $\pi \in S_n$.

Beispiel.

1. $S_3 = \{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}\}$.

2. Nach Satz 2 ist die Umkehrfunktion einer Permutation wieder eine Permutation.
Für $\pi = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\3 & 1 & 4 & 2 & 5\end{pmatrix} \in S_5$ gilt zum Beispiel $\pi^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\2 & 4 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix} \in S_5$.

3. Nach Satz 1 ist auch die Verkettung zweier Permutationen wieder eine Permutation. Beachten Sie aber, dass es bei der Verkettung im allgemeinen auf die Reihenfolge ankommt:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

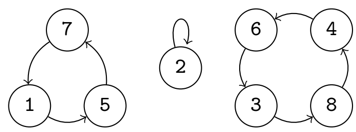
4. Wenn $(x_1, \dots, x_n)$ ein Tupel ist und $\pi \in S_n$ eine Permutation, dann hat das Tupel $(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$ genau die selben Komponenten, allerdings im Allgemeinen in einer anderen Reihenfolge.

5. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix} = (1\ 2\ 4\ 3) = (3\ 1\ 2\ 4)$ ist ein Zyklus. Beachten Sie: Ein Zyklus lässt sich auf verschiedene Weise notieren.

6. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} = (1\ 3)$ ist eine Transposition.

7. Eine Permutation $\pi \in S_n$ lässt sich als Graph mit Knotenmenge $V = \{1, \dots, n\}$ veranschaulichen, bei der eine Kante (u, v) anzeigt, dass $\pi(u) = v$ gilt. Beispiel:

$$\pi = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 5 & 2 & 8 & 6 & 7 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix} \in S_8$$



Diese Permutation hat den Fixpunkt 2.

Ein Graph mit Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$ stellt genau dann in diesem Sinn eine Permutation dar, wenn jeder Knoten genau eine ausgehende Kante (wg. Funktionseigenschaft) und genau eine eingehende Kante (wg. Bijektivität: Surjektivität = mindestens eine; Injektivität = höchstens eine) hat.

Eine Permutation ist genau dann ein Zyklus im Sinn von Def. 13, wenn der zugehörige Graph als Graph ein Zyklus ist.

Wie das obige Beispiel 7 schon suggeriert, lässt sich jede Permutation in eindeutiger Weise in paarweise disjunkte Zyklen zerlegen. Für die Permutation in diesem Beispiel gilt nämlich $\pi = (1\ 5\ 7)(2)(3\ 4\ 8\ 6)$. In diesem Fall ist die Reihenfolge der Zyklen unbedeutend, denn wenn σ_1, σ_2 zwei disjunkte Zyklen sind, dann gilt $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$. Fixpunkte sind Zyklen der Länge eins. Per Konvention braucht man diese bei der Zerlegung einer Permutation in Zyklen nicht zu notieren. Man kann also auch einfach $\pi = (1\ 5\ 7)(3\ 4\ 8\ 6)$ für die Permutation aus Beispiel 7 schreiben.

Um eine gegebene Permutation in disjunkte Zyklen zu zerlegen, geht man nach folgendem Algorithmus vor:

INPUT: $\pi \in S_n$
OUTPUT: Die Zerlegung von π in disjunkte Zyklen.

setze $B = \{1, \dots, n\}$
solange $B \neq \emptyset$:
  wähle ein beliebiges $k \in B$
  falls $\pi(k) = k$, dann
    setze $B = B \setminus \{k\}$
  anderenfalls
    bestimme das kleinste $m \in \{1, \dots, n\}$ mit $\pi^m(k) = k$

8 notiere den Zyklus $(k\ \pi(k)\ \pi^2(k)\ \dots\ \pi^{m-1}(k))$

9 setze $B = B \setminus \{k, \pi(k), \dots, \pi^{m-1}(k)\}$.

Mit der Notation $\pi^i(k)$ ist die i-fache Anwendung von π auf k gemeint, also z.B. $\pi^3(7) = \pi(\pi(\pi(7)))$. Wir überlassen es wieder als Übung, sich davon zu überzeugen, dass der Algorithmus terminiert und die Ausgabe korrekt ist. (Überlegen Sie sich insbesondere, warum es in Schritt 7 immer ein $m \in \{1, \dots, n\}$ mit $\pi^m(k) = k$ geben muss.)

Wegen Satz 1 ist die Verkettung zweier Permutationen wieder eine Permutation, d.h. es gilt $\forall\ \pi, \sigma \in S_n : \pi \circ \sigma \in S_n$. Wir können die Verkettung also als eine Funktion $\circ\colon S_n \times S_n \to S_n$ auffassen. Allgemein nennt man eine Funktion $\circ\colon A \times A \to A$ eine *Verknüpfung* (engl. *operation*) auf der Menge A. Statt $\circ(x, y)$ schreibt man üblicherweise $x \circ y$. Solche Verknüpfungen können interessante Eigenschaften haben. Für die Verknüpfung von Permutationen gelten zum Beispiel folgende Regeln:

- $\forall\ \pi, \sigma, \tau \in S_n : (\pi \circ \sigma) \circ \tau = \pi \circ (\sigma \circ \tau)$
- $\forall\ \pi \in S_n : \pi \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ \pi = \pi$
- $\forall\ \pi \in S_n\ \exists\ \sigma \in S_n : \pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi = \mathrm{id}$

Ähnliche Regeln gelten für die bekannten Rechenoperationen $+$ (z.B. für $A = \mathbb{Z}$ oder $A = \mathbb{R}$) und $\cdot$ (z.B. für $A = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ oder $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Das motiviert folgende Abstraktion:

Definition 14. Sei A eine Menge und $\circ\colon A \times A \to A$ eine Verknüpfung auf A.

1. $\circ$ heißt *assoziativ* (engl. *associative*), falls gilt: $\forall\ x, y, z \in A : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
2. $\circ$ heißt *kommutativ* (engl. *commutative*), falls gilt: $\forall\ x, y \in A : x \circ y = y \circ x$
3. $e \in A$ heißt *Neutralelement* (engl. *neutral element*) (bezüglich $\circ$), falls gilt: $\forall\ x \in A : x \circ e = e \circ x = x$.
4. Ist $e \in A$ ein Neutralelement, so heißt $x \in A$ *invertierbar* (engl. *invertible*), falls gilt:
$$\exists\ y \in A : x \circ y = y \circ x = e.$$
Ein solches Element y heißt dann ein *Inverses* (engl. *inverse*) von x.
5. Das Paar $(A, \circ)$ heißt *Gruppe* (engl. *group*), falls $\circ$ assoziativ ist, A ein Neutralelement bezüglich $\circ$ enthält, und es zu jedem Element x von A ein passendes Inverses in A gibt.
Wenn die Verknüpfung aus dem Kontext klar ist, sagt man auch einfach „A ist eine Gruppe“.
6. Ist $(A, \circ)$ eine Gruppe und ist $\circ$ auch kommutativ, so nennt man $(A, \circ)$ eine *abelsche* Gruppe (engl. *abelian*).

Satz 6. Sei $\circ\colon A \times A \to A$ eine assoziative Verknüpfung.

1. Sind e_1, e_2 Neutralelemente von $\circ$, so gilt $e_1 = e_2$.
2. Ist e ein Neutralelement von $\circ$, $x \in A$ invertierbar, und sind y_1, y_2 Inverse von x, so gilt $y_1 = y_2$.
Notation: $x^{-1} := y_1 = y_2$.
3. Ist $x \in A$ invertierbar, so ist auch x^{-1} invertierbar und es gilt $(x^{-1})^{-1} = x$.
4. Sind $x, y \in A$ invertierbar, so ist auch $x \circ y$ invertierbar und es gilt $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$.

Beweis.

1. Nach Definition gilt $\forall\, x \in A : x \circ e_1 = e_1 \circ x = x$ und $\forall\, x \in A : x \circ e_2 = e_2 \circ x = x$.

   Aus dem ersten folgt mit $x = e_2$, dass $e_2 \circ e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2$ ist, und aus dem zweiten folgt mit $x = e_1$, dass $e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = e_1$ ist.

   Aus beidem zusammen folgt $e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2$, wie behauptet.

2. Es gilt $x \circ y_1 = e$, also $y_2 \circ (x \circ y_1) = y_2 \circ e$, also $(y_2 \circ x) \circ y_1 = y_2$, also $e \circ y_1 = y_2$, also $y_1 = y_2$.

3., 4. Übung.

Beispiel.

1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ sind abelsche Gruppen. Das Neutralelement bezüglich $+$ ist jeweils 0, und das Neutralelement bezüglich $\cdot$ ist jeweils 1.

2. $(S_n, \circ)$ ist eine Gruppe, aber für $n \geq 3$ keine abelsche Gruppe. Das Neutralelement ist die Identitätsabbildung.

3. Bei endlichen Gruppen lässt sich die Verknüpfung als *Verknüpfungstabelle* aufschreiben. Zum Beispiel wird die Menge $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit der Verknüpfung $*\colon G \times G \to G$, die durch folgende Tabelle definiert ist, zu einer abelschen Gruppe.

$*$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

4. Ist A eine Menge, so sind $\cup$ und $\cap$ Verknüpfungen auf $\mathcal{P}(A)$, aber weder $(\mathcal{P}(A), \cup)$ noch $(\mathcal{P}(A), \cap)$ ist eine Gruppe. Definiert man auf $\mathcal{P}(A)$ die Verknüpfung

$$\oplus\colon \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A), \quad U \oplus V := (U \cup V) \setminus (U \cap V),$$

   so ist $(\mathcal{P}(A), \oplus)$ eine abelsche Gruppe. Das Neutralelement ist dann die leere Menge $\emptyset$ und jedes Element $U \in \mathcal{P}(A)$ ist zu sich selbst invers.

5. Betrachte die sechs Funktionen $f_i\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x, & f_2(x) &= \frac{1}{1-x}, & f_3(x) &= \frac{1}{x}, \\ f_4(x) &= \frac{x-1}{x}, & f_5(x) &= 1 - x, & f_6(x) &= \frac{x}{x-1}. \end{aligned}$$

   Die Menge $G = \{f_1, \ldots, f_6\}$ bildet zusammen mit der Komposition eine Gruppe.

6. Sei $G = \{ x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1 \}$ und definiere

$$x \oplus y := \frac{x+y}{1+xy},$$

wobei die Symbole auf der rechten Seite die übliche Bedeutung haben. Dann ist $(G, \oplus)$ eine abelsche Gruppe. Man sieht sofort, dass $\oplus$ kommutativ ist, dass 0 ein neutrales Element ist, und dass $-x$ das Inverse von x ist. Assoziativität lässt sich leicht nachrechnen:

$$(x \oplus y) \oplus z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x\frac{y+z}{1+yz}} = x \oplus (y \oplus z).$$

Etwas weniger offensichtlich ist in diesem Beispiel, dass $\oplus$ tatsächlich eine Verknüpfung ist, dass also für jede beliebige Wahl von $x, y \in G$ auch $x \oplus y$ in G liegt. Es lässt sich zeigen, dass dem so ist.

Die Gruppe $(G, \oplus)$ erklärt die Addition von Geschwindigkeiten in der speziellen Relativitätstheorie.

7. Die Konkatenation $\circ$ ist eine Verknüpfung auf der Menge Ω^* aller Wörter über einem Alphabet Ω. Diese Verknüpfung ist assoziativ und hat ein Neutralelement (nämlich das leere Wort), aber es handelt sich bei $(\Omega^*, \circ)$ nicht um eine Gruppe, weil es nicht zu jedem Wort ein Inverses gibt.

Um auf Wörtern eine Gruppe zu definieren, kann man folgendes tun. Betrachte zwei Alphabete $\Omega, \bar{\Omega}$ mit $\Omega \cap \bar{\Omega} = \emptyset$ und $|\Omega| = |\bar{\Omega}|$ sowie eine bijektive Funktion $i \colon \Omega \to \bar{\Omega}$. Wir betrachten Wörter über dem Alphabet $\Omega \cup \bar{\Omega}$ und wollen die Buchstaben in $\bar{\Omega}$ als Inverse der Buchstaben in Ω auffassen, und umgekehrt. Das Inverse von $x \in \Omega$ soll $i(x) \in \bar{\Omega}$ sein, und das von $y \in \bar{\Omega}$ sei $i^{-1}(y) \in \Omega$.

Es sei nun $W \subseteq (\Omega \cup \bar{\Omega})^*$ die Menge aller Wörter, die keine Teilwörter der Form $xi(x)$ oder $i(x)x$ mit $x \in \Omega$ enthalten. Die Verknüpfung $\circ \colon W \times W \to W$ sei so definiert, dass $\omega \circ \chi$ das Wort in W sei, das entsteht, wenn man aus der Konkatenation $\omega\chi$ so lange alle Teilwörter der Form $xi(x)$ und $i(x)x$ löscht, bis keine mehr übrig sind. Dann ist $(W, \circ)$ eine Gruppe.

Beispiel: $\Omega = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, $\bar{\Omega} = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}\}$, $i(\mathtt{a}) = \mathtt{A}$, $i(\mathtt{b}) = \mathtt{B}$, $i(\mathtt{c}) = \mathtt{C}$. Dann gilt zum Beispiel

$$\mathtt{acBcACaaB} \circ \mathtt{bAaCbbc} = \mathtt{acBcACaaCbbC} \quad \text{und} \quad \mathtt{bAaCbbc}^{-1} = \mathtt{CBBcAaB}.$$

8. Seien $(A, \circ), (B, *)$ zwei Gruppen und $G = A \times B$. Auf G wird durch

$$(a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) := (a_1 \circ a_2, b_1 * b_2)$$

eine Verknüpfung $\odot \colon G \times G \to G$ definiert, mit der G zu einer Gruppe wird.

Definition 15. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe.

1. $U \subseteq G$ heißt eine *Untergruppe* (engl. *subgroup*), falls gilt $U \neq \emptyset$ und $\forall\, u, v \in U : u \circ v \in U \land u^{-1} \in U$.

2. Sei $U \subseteq G$ eine Untergruppe und seien $u_1, \ldots, u_m \in U$. Man sagt, U wird von $u_1, \ldots, u_m$ *erzeugt* (engl. *generated*), wenn es für jedes $u \in U$ Zahlen $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$ und $e_1, \ldots, e_k \in \{-1, 1\}$ gibt, so dass $u = u_{i_1}^{e_1} \circ u_{i_2}^{e_1} \circ \cdots \circ u_{i_k}^{e_1}$. In diesem Fall schreibt man $U = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle$.

Beispiel.

1. $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$; $(\mathbb{Q}, +)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$.

2. $(\{\, x \in \mathbb{Q} : x > 0 \,\}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$; $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\{\, x \in \mathbb{R} : x > 0 \,\}, \cdot)$ sind Untergruppen von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

3. S_3 lässt sich auffassen als Untergruppe von S_5, wenn man sich jede Funktion
$$f \colon \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$$
aus S_3 zu einer Funktion $f \colon \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mit $f(4) = 4$ und $f(5) = 5$ fortgesetzt denkt.

4. S_6 ist eine Gruppe mit 720 Elementen. Die von $g_1 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$, $g_2 = (1\ 5\ 3)(2\ 4\ 6)$, $g_3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ erzeugte Untergruppe von S_6 besteht aus den folgenden 18 Elementen:
$$\begin{aligned}
\mathrm{id} &= (1)(2)(3)(4)(5)(6) & g_1 &= (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)\\
g_2 &= (1\ 5\ 3)(2\ 4\ 6) & g_3 &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)\\
g_1 \circ g_2 &= (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6) & g_1 \circ g_3 &= (1\ 3\ 5)(2)(4)(6)\\
g_2 \circ g_1 &= (1\ 6)(2\ 3)(4\ 5) & g_2 \circ g_2 &= (1\ 3\ 5)(2\ 6\ 4)\\
g_2 \circ g_3 &= (1\ 6\ 3\ 2\ 5\ 4) & g_3 \circ g_1 &= (2\ 4\ 6)(1)(3)(5)\\
g_3 \circ g_2 &= (1\ 4\ 3\ 6\ 5\ 2) & g_3 \circ g_3 &= (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)\\
g_1 \circ g_2 \circ g_3 &= (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4) & g_1 \circ g_3 \circ g_3 &= (1\ 4\ 5\ 2\ 3\ 6)\\
g_2 \circ g_3 \circ g_3 &= (2\ 6\ 4)(1)(3)(5) & g_3 \circ g_1 \circ g_3 &= (1\ 2\ 5\ 6\ 3\ 4)\\
g_3 \circ g_2 \circ g_3 &= (1\ 5\ 3)(2)(4)(6) & g_1 \circ g_2 \circ g_3 \circ g_3 &= (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)
\end{aligned}$$
Weitere Elemente von S_6 enthält die Untergruppe $\langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ nicht, denn wenn Sie irgend eines der obigen Elemente invertieren oder mit einem anderen verketten, erhalten Sie immer ein Element, das schon in der Liste steht. Zum Beispiel gilt $(g_3 \circ g_1 \circ g_3)^{-1} = g_3 \circ g_2$.

5. Sei $(W, \circ)$ die Gruppe aus dem vorherigen Beispiel, die aus Wörtern über dem Alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}\}$ gebildet wird. Dann gilt $W = \langle \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c} \rangle$.

Definition 16. Seien $(G_1, \circ)$ und $(G_2, *)$ Gruppen. Eine Funktion $h\colon G_1 \to G_2$ heißt *Homomorphismus,* falls gilt:

$$\forall\, x, y \in G_1 : h(x \circ y) = h(x) * h(y).$$

Sei e_2 das Neutralelement von G_2. Die Menge

$$\ker h := \{\, x \in G_1 : h(x) = e_2 \,\} \subseteq G_1$$

heißt der *Kern* (engl. *kernel*) und

$$\operatorname{im} h := \{\, h(x) : x \in G_1 \,\} \subseteq G_2$$

heißt das *Bild* (engl. *image*) von h.

Ein bijektiver Homomorphismus heißt *Isomorphismus.* (engl. *isomorphism*) Wenn es einen Isomorphismus von G_1 nach G_2 gibt, sagt man, G_1 und G_2 sind (zueinander) *isomorph.* (engl. *isomorphic*) Notation in diesem Fall: $G_1 \cong G_2$.

Beispiel.

1. Die Abbildung $h\colon S_3 \to S_5$, die im vorigen Beispiel beschrieben wurde, ist ein Homomorphismus. Statt zu sagen, S_3 ist eine Untergruppe von S_5, wäre es sauberer zu sagen $h(S_3)$ ist eine Untergruppe von S_5.

2. Die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$ ist ein Homomorphismus zwischen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

3. Sind $(A, \circ), (B, *)$ zwei Gruppen und $G = A \times B$ zusammen mit

   $$(a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) := (a_1 \circ a_2, b_1 * b_2).$$

   Dann ist $h\colon G \to A$, $(a, b) \mapsto a$ ein Homomorphismus.

4. Sei $(W, \circ)$ die Gruppe aus dem vorherigen Beispiel, die aus Wörtern über dem Alphabet $\Omega \cup \bar{\Omega} = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}\}$ gebildet wird. Sei $(G, *)$ irgendeine andere Gruppe und seien $g_1, g_2, g_3 \in G$ beliebige Elemente. Dann gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $h\colon W \to G$ mit $h(\mathtt{a}) = g_1$, $h(\mathtt{b}) = g_2$, $h(\mathtt{c}) = g_3$, denn aus diesen drei Werten und der Homomorphismuseigenschaft folgt direkt der Wert $h(\omega)$ für jedes Wort $\omega \in (\Omega \cup \bar{\Omega})^*$. Zum Beispiel muss gelten:

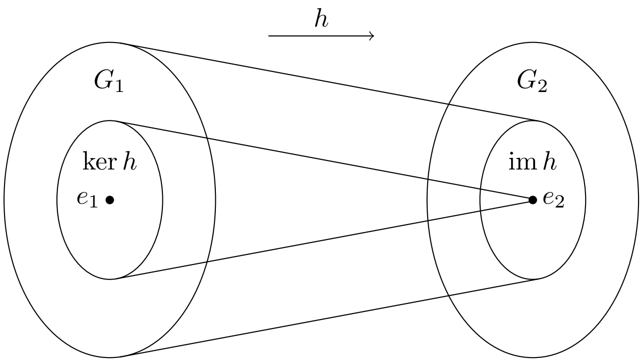
   $$\begin{aligned} h(\mathtt{aCbbaBBAc}) &= h(\mathtt{a} \circ \mathtt{C} \circ \mathtt{b} \circ \mathtt{b} \circ \mathtt{a} \circ \mathtt{B} \circ \mathtt{B} \circ \mathtt{A} \circ \mathtt{c}) \\ &= g_1 * g_3^{-1} * g_2 * g_2 * g_1 * g_2^{-1} * g_2^{-1} * g_1^{-1} * g_3 \end{aligned}$$

Satz 7. Sei $h\colon G_1 \to G_2$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

1. Ist e_1 das Neutralelement von G_1 und e_2 das Neutralelement von G_2, so gilt $h(e_1) = e_2$.

2. $\ker h$ ist eine Untergruppe von G_1.

3. $\operatorname{im} h$ ist eine Untergruppe von G_2.



Beweis.

1. Es gilt $h(e_1) = h(e_1 \circ e_1) = h(e_1) * h(e_1)$. Multipliziert man diese Gleichung mit dem Inversen von $h(e_1)$ in G_2, so erhält man $e_2 = h(e_1)$.

2. Nach Teil 1 gilt zunächst $e_1 \in \ker h$ und damit insbesondere $\ker h \neq \emptyset$. Darüber hinaus bleibt zu zeigen: für alle $u, v \in \ker h$ gilt $u \circ v \in \ker h$ und $u^{-1} \in \ker h$.

   Seien $u, v \in \ker h$ beliebig. Es gilt $h(u) = h(v) = e_2$, weil $u, v \in \ker h$. Folglich gilt:

   $$h(u \circ v) = h(u) * h(v) = e_2 * e_2 = e_2,$$

   und also $u \circ v \in \ker h$.

   Es gilt $e_2 = h(e_1) = h(u \circ u^{-1}) = h(u) * h(u^{-1}) = e_2 * h(u^{-1}) = h(u^{-1})$.

   (Daraus folgt übrigens auch $h(u)^{-1} = h(u^{-1})$.)

3. Nach Teil 1 gilt zunächst $e_2 \in \operatorname{im} h$. Darüber hinaus bleibt zu zeigen: für alle $u, v \in \operatorname{im} h$ gilt $u * v \in \operatorname{im} h$ und $u^{-1} \in \operatorname{im} h$.

   Seien $u, v \in \operatorname{im} h$ beliebig. Dann gibt es $a, b \in G_1$ mit $u = h(a)$ und $v = h(b)$.

   Es gilt $u * v = h(a) * h(b) = h(a \circ b) \in \operatorname{im} h$.

   Außerdem $u^{-1} = h(a)^{-1} = h(a^{-1}) \in \operatorname{im} h$. ∎

Beispiel. Betrachte $\pi = (1\ 3)(2\ 4\ 7)(5\ 6) \in S_7$. Dann ist

$$h\colon \mathbb{Z} \to S_7, \quad h(n) := \pi^n$$

ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$ ach $(S_7, \circ)$. Dabei bezeichnet $\pi^n = \pi \circ \cdots \circ \pi$ die Permutation, die sich durch n-fache Verkettung von π mit sich selbst gibt. Im Fall $n < 0$ ist die Definition im Sinn von $\pi^n := (\pi^{-1})^{|n|}$ gemeint, und für $n = 0$ soll $\pi^0 = \mathrm{id}$ sein.

Wegen

$$\begin{aligned}
\pi^0 &= \mathrm{id} \\
\pi^1 &= (1\ 3)(2\ 4\ 7)(5\ 6) \\
\pi^2 &= (2\ 7\ 4) \\
\pi^3 &= (1\ 3)(5\ 6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi^4 &= (2\ 4\ 7)\\ \pi^5 &= (1\ 3)(2\ 7\ 4)(5\ 6)\\ \pi^6 &= \mathrm{id}\end{aligned}$$

gilt $\pi^n = \pi^{n+6}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt

$$\ker h = 6\mathbb{Z} = \{\dots, -12, -6, 0, 6, 12, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}$$

und

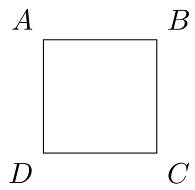
$$\operatorname{im} h = \{\mathrm{id}, \pi, \pi^2, \pi^3, \pi^4, \pi^5\} \subseteq S_7.$$

Beachten Sie, dass $6\mathbb{Z}$ mit $+$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ und $\{\mathrm{id}, \pi, \pi^2, \pi^3, \pi^4, \pi^5\}$ mit $\circ$ eine Untergruppe von S_7 ist.

Gruppen kann man dazu verwenden, Symmetrien zu beschreiben.

Beispiel.

1. Betrachte ein Quadrat mit den Eckpunkten A, B, C, D.

   Eine Symmetrie lässt sich auffassen als eine Funktion $\{A, B, C, D\} \to \{A, B, C, D\}$, die das Quadrat als Ganzes fest lässt.

   Das Quadrat hat folgende Symmetrien:

   - $\sigma = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$ – das ist die Spiegelung an der horizontalen Achse
   - $\rho = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}$ – das ist die Rotation um $90°$ entgegen dem Uhrzeigersinn

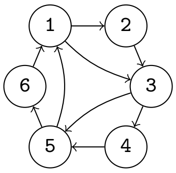
   sowie einige weitere, die sich aus diesen durch Komposition bilden lassen. Die komplette Liste lautet:

   $$G = \{\mathrm{id}, \rho, \rho^2, \rho^3, \sigma, \sigma\rho, \sigma\rho^2, \sigma\rho^3\}.$$

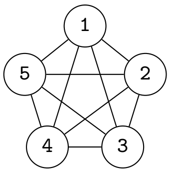
   Diese Menge G bildet zusammen mit der Komposition eine Gruppe, die sogenannte *Symmetriegruppe* (engl. *symmetry group*) des Quadrats. Die Gruppe ist nicht abelsch; es gilt aber zum Beispiel $\sigma\rho = \rho^3\sigma$.

2. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die Menge aller Graphenisomorphismen von G auf sich selbst bildet mit der Komposition eine Gruppe, die sogenannte *Symmetriegruppe* (engl. *symmetry group*) oder *Automorphismengruppe* (engl. *automorphism group*) von G. Man bezeichnet sie mit $\mathrm{Aut}(G)$. Diese Gruppe ist immer eine Untergruppe von S_V.

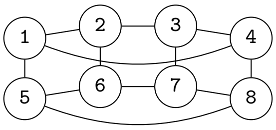
Beispiele:

$G =$ 

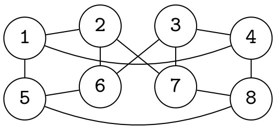
$\Rightarrow \quad \mathrm{Aut}(G) = \{\mathrm{id}, (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6), (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4)\} \subseteq S_6$

$G =$ 

$\Rightarrow \quad \mathrm{Aut}(G) = S_5$

$G =$ 

$\Rightarrow \quad \mathrm{Aut}(G) = \langle (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8) \rangle \subseteq S_8$

$G =$ 

$\Rightarrow \quad \mathrm{Aut}(G) = \langle (1\ 2\ 7\ 8\ 5\ 6\ 3\ 4) \rangle \subseteq S_8$

Die Transformationen einer Symmetriegruppe lassen zwar die betreffende Struktur als Ganzes fest, aber nicht unbedingt ihre Einzelteile. Zum Beispiel werden die einzelnen Knoten eines Graphen von einer Symmetrie-Transformation typischerweise auf andere Knoten abgebildet. Andererseits ist es typischerweise nicht möglich, einen bestimmten Knoten durch eine Symmetrie-Transformation auf jeden beliebigen anderen Knoten abzubilden. Um genau zu beschreiben, was eine Gruppe (z.B. die Symmetriegruppe eines Graphen) mit den Elementen einer Menge (z.B. der Knotenmenge des Graphen) macht, verwendet man den Begriff der Gruppen-Operationen, der wie folgt definiert ist.

Definition 17. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, e das Neutralelement von G, und X eine Menge. Eine Funktion

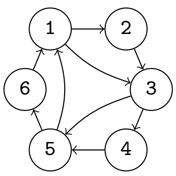
$$*\colon G \times X \to X$$

heißt *Gruppenoperation* (engl. *group action*) von G auf X, falls gilt:

1. $\forall\, x \in X : e * x = x$
2. $\forall\, g, h \in G\ \forall\, x \in X : (g \circ h) * x = g * (h * x)$

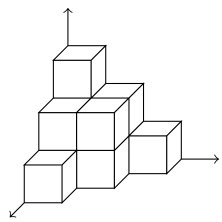
Beispiel.

1. $G = S_n$ operiert auf der Menge $X = \{1, \ldots, n\}$, wenn man definiert $\pi * x := \pi(x)$ für $\pi \in S_n$ und $x \in X$.
2. Die Symmetriegruppe $\mathrm{Aut}(G)$ eines Graphen $G = (V, E)$ definiert eine Gruppenoperation $\mathrm{Aut}(G) \times V \to V$ auf der Knotenmenge sowie eine Gruppenoperation $\mathrm{Aut}(G) \times E \to E$ auf der Kantenmenge des Graphen. Ist G zum Beispiel der Graph



von vorher, und ist $*\colon \operatorname{Aut}(G) \times V \to V$ die Operation der Symmetriegruppe auf den Knoten von G, so gilt $(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6) * 4 = 6$, $(1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4) * 5 = 3$, usw. Wie man sieht, kann der Konten 1 durch Anwendung von Symmetrien auf die Knoten 3 und 5 abgebildet werden, nicht aber auf 2, 4 oder 6. Mit der entsprechenden Operation von $\operatorname{Aut}(G)$ auf E kann die Kante $(1,3)$ auf die Kante $(3,5)$ oder die Kante $(5,1)$ abgebildet werden, aber auf keine andere Kante.

3. Betrachten Sie die folgende Anordnung von 11 Würfeln in der Ecke eines Raumes:



Die Anordnung ist symmetrisch in dem Sinn, dass sich genau dann ein Würfel an Position (i,j,k) befindet, wenn es auch einen Würfel an jeder der Positionen (i,k,j), (j,i,k), (j,k,i), (k,i,j), (k,j,i) gibt. Wir können diese Symmetrie als eine Gruppenoperation von S_3 auf der Würfelmenge

$$X = \{(1,1,1),(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2),(2,2,1),(2,1,2),\\ (1,2,2),(2,2,2),(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1)\}$$

auffassen. Die Elemente von S_3 wirbeln die einzelnen Würfel in einer Weise durcheinander, dass dabei die Anordnung als Ganzes erhalten bleibt.

4. Sei $(G,\circ)$ eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Dann wird durch

$$*\colon H \times G \to G, \quad h * g := h \circ g \circ h^{-1}$$

eine Gruppenoperation der Gruppe $(H,\circ)$ auf der Menge G definiert.

Definition 18. Sei $(G,\circ)$ eine Gruppe, X eine Menge und $*\colon G\times X \to X$ eine Gruppenoperation. Weiter sei $x \in X$.

1. $G * x := \{\, g * x : g \in G \,\} \subseteq X$ heißt die *Bahn* (engl. *orbit*) von x (unter der Gruppenoperation $*$).

2. $\operatorname{Stab}(x) := \{\, g \in G : g * x = x \,\} \subseteq G$ heißt der *Stabilisator* (engl. *stabilizer*) von x (bezüglich der Gruppenoperation $*$).

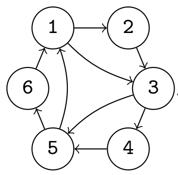
Beispiel.

1. Sei $G = S_4$ und $X = \{1,2,3,4\}$ und sei $*\colon G \times X \to X$ definiert durch $\pi * x := \pi(x)$. Dann gilt $G * 3 = X$ und

$$\operatorname{Stab}(3) = \{\mathrm{id}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}\}.$$

2. Sei nun $G = \langle (2\ 1), (3\ 4) \rangle \subseteq S_4$ und $X = \{1,2,3,4\}$ und sei $*\colon G \times X \to X$ definiert durch $\pi * x := \pi(x)$. In diesem Fall gilt $G * 3 = \{3,4\}$ und $\mathrm{Stab}(3) = \{\mathrm{id}, (2\ 1)\}$.

3. Sei $G = (V, E)$ der Graph

   .

   Die Symmetriegruppe $\mathrm{Aut}(G)$ teilt die Knotenmenge des Graphen in zwei Bahnen auf, nämlich $\{1,3,5\}$ und $\{2,4,6\}$. Für jeden Knoten $v \in V$ gilt in diesem Beispiel $\mathrm{Stab}(v) = \{\mathrm{id}\}$.

4. Sei $G = S_5$ und $X = \mathbb{N}^5$. Betrachte die Gruppenoperation

   $$*\colon G \times X \to X, \quad \pi * (x_1, \ldots, x_5) := (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(5)}).$$

   Dann gilt unter anderem

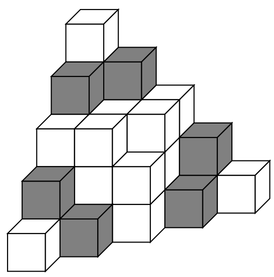
   - $\mathrm{Stab}((0,0,0,0,0)) = G$
     $G * (0,0,0,0,0) = \{(0,0,0,0,0)\}$
   - $\mathrm{Stab}((0,0,0,0,1)) \cong S_4$
     $G * (0,0,0,0,1) = \{(0,0,0,0,1), (0,0,0,1,0), (0,0,1,0,0), (0,1,0,0,0), (1,0,0,0,0)\}$
   - $\mathrm{Stab}((0,0,0,1,1)) \cong S_3 \times S_2$ und

     $$\begin{aligned} G * (0,0,0,1,1) = \{&(0,0,0,1,1), (0,0,1,0,1), (0,1,0,0,1), (1,0,0,0,1), (0,0,1,1,0),\\ &(0,1,0,1,0), (1,0,0,1,0), (0,1,1,0,0), (1,0,1,0,0), (1,1,0,0,0)\} \end{aligned}$$

   - $\mathrm{Stab}((0,0,1,1,2)) \cong S_2 \times S_2$ und

     $$\begin{aligned} G * (0,0,1,1,2) = \{&(0,0,1,1,2), (0,0,1,2,1), (0,0,2,1,1), (0,2,0,1,1), (2,0,0,1,1),\\ &(0,1,0,1,2), (0,1,0,2,1), (0,1,2,0,1), (0,2,1,0,1), (2,0,1,0,1),\\ &(0,1,1,0,2), (0,1,1,2,0), (0,1,2,1,0), (0,2,1,1,0), (2,0,1,1,0),\\ &(1,0,0,1,2), (1,0,0,2,1), (1,0,2,0,1), (1,2,0,0,1), (2,1,0,0,1),\\ &(1,0,1,0,2), (1,0,1,2,0), (1,0,2,1,0), (1,2,0,1,0), (2,1,0,1,0),\\ &(1,1,0,0,2), (1,1,0,2,0), (1,1,2,0,0), (1,2,1,0,0), (2,1,1,0,0)\}. \end{aligned}$$

5. Die unten stehende Anordnung von Würfeln ist im selben Sinn symmetrisch wie die Anordnung aus dem vorherigen Beispiel. Wir haben hier sechs Würfel grau markiert, die miteinander eine Bahn bilden.

Beachten Sie, dass jeder Würfel zu genau einer Bahn gehört. In diesem Beispiel hat jede Bahn entweder ein Element oder drei Elemente oder sechs Elemente.

Satz 8. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, X eine Menge und $*\colon G \times X \to X$ eine Gruppenoperation.

1. Durch $x \sim y \iff \exists\, g \in G : x = g * y$ wird auf X eine Äquivalezrelation erklärt.
2. Für jedes $x \in X$ ist $[x]_\sim$ genau die Bahn von x.
3. Für jedes $x \in X$ ist $\mathrm{Stab}(x)$ eine Untergruppe von G.

Beweis.

1. Reflexivität: $x \sim x$ gilt, weil jede Gruppe G ein Neutralelement e enthält (Def. 14) und für dieses nach Def. 17 gilt $x = e*x$. Es gibt also ein $g \in G$, nämlich $g = e$, mit $x = g*x$.

   Symmetrie: Wenn $x \sim y$ gilt, dann $\exists\, g \in G : x = g * y$. Wähle ein solches g. Nach Def. 14 existiert ein Inverses g^{-1} von g in G. Damit gilt

   $$g^{-1} * x = g^{-1} * (g * y) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Def. } 17}}{=} (g^{-1} \circ g) * y \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Def. } 14}}{=} e * y \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Def. } 17}}{=} y.$$

   Also gibt es ein Gruppenelement h, nämlich $h = g^{-1}$, mit $y = h * x$. Daraus folgt $y \sim x$.

   Transitivität: Angenommen es gilt $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann gibt es Gruppenelemente $g_1, g_2 \in G$ mit $x = g_1 * y$ und $y = g_2 * z$. Dann gilt auch

   $$x = g_1 * y = g_1 * (g_2 * z) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Def. } 17}}{=} (g_1 \circ g_2) * z.$$

   Also gibt es ein Gruppenelement g, nämlich $g = g_1 \circ g_2$, mit $x = g * z$. Daraus folgt $x \sim z$.

2. Ist $x \in X$, so ist

   $$\begin{aligned}[x]_\sim &= \{\, y \in X \mid x \sim y \,\}\\ &= \{\, y \in X \mid y \sim x \,\}\\ &= \{\, y \in X \mid \exists\, g \in G : y = g * x \,\}\\ &= \{\, g * x \mid g \in G\} = G * x.\end{aligned}$$

3. (a) Das Neutralelement e von G liegt in $\mathrm{Stab}(x)$, weil $e * x = x$ nach Def. 17.

   (b) Sind $g, h \in \mathrm{Stab}(x)$, so gilt $g*x = h*x = x$. Damit gilt auch $(g \circ h)*x = g*(h*x) = g * x = x$, also ist $g \circ h \in \mathrm{Stab}(x)$.

   (c) Ist $g \in \mathrm{Stab}(x)$, so gilt $g*x = x$. Dann gilt auch $g^{-1}*x = g^{-1}*(g*x) = (g^{-1}\circ g)*x = e * x = x$, also ist auch $g^{-1} \in \mathrm{Stab}(x)$.

   Aus (a), (b), (c) zusammen folgt, dass $\mathrm{Stab}(x)$ eine Untergruppe von G ist.

7 Modulare Arithmetik

8 Kombinatorik

9 Summen und Rekurrenzen

Index