Diskrete Strukturen · Winter 16/17 · **Zweite Klausur** 03.04.2017

Name (deutlich lesbar!) k Matrikelnummer

- Es sind keine anderen Hilfsmittel als ein Stift zugelassen, insbesondere keine Unterlagen und keine elektronischen Geräte. Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus.
- Die Antworten zur Aufgabe 1 sind auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Notieren Sie die Antworten für die weiteren Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten weissen Papier. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und legen Sie bei der Abgabe die Blätter in der Reihenfolge der Aufgaben zusammen, mit dem Aufgabenblatt als Deckblatt. Die abgegebenen Blätter werden oben links zusammengetackert. Halten Sie deshalb beim Schreiben genügend Abstand zu dieser Ecke.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Sie können die Teilnahme an der Klausur jederzeit ohne Abgabe einer Lösung beenden. Ein solcher Abbruch wird nicht als Fehlversuch gewertet.

Aufgabe 1. Wahr oder falsch?

	wahr	falsch
Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A, so gilt $x \in [x]_\sim$ für alle $x \in A$	☐	☐
Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A, so gilt immer $A \in A/\sim$	☐	☐
Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A, so gilt immer $A \subseteq A/\sim$	☐	☐
$T(n) = T(n/2) + \Omega(n) \Rightarrow T(n) = \Omega(n)$	☐	☐
$f(n) = \Omega(n^2) \Rightarrow f(n) = \mathrm{O}(n)$	☐	☐
$f(n) = \mathrm{O}(n^2) \Rightarrow f(n) = \Omega(n)$	☐	☐
Für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt $\gcd(x, x+1) = 1$	☐	☐
Für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt $\gcd(x, x+2) = 2$	☐	☐
Für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt $\gcd(2x, 3x) = \lvert x\rvert$	☐	☐

Lösung. wahr-falsch-falsch, wahr-falsch-falsch, wahr-falsch-wahr

Aufgabe 2. Sei $\Omega = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und sei $h\colon \Omega^* \setminus \{\epsilon\} \to \Omega^*$ die Funktion, die von jedem Wort den ersten Buchstaben löscht, also z. B. $h(\mathtt{abba}) = \mathtt{bba}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) h ist injektiv

b) h ist surjektiv

c) h ist bijektiv

Lösung.

a) falsch, denn zum Beispiel gilt $h(\mathtt{aa}) = h(\mathtt{ba}) = \mathtt{a}$, obwohl $\mathtt{aa} \neq \mathtt{ba}$.

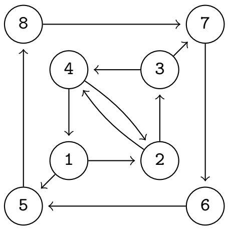
b) wahr, denn ist $\omega \in \Omega^*$ beliebig, so gilt z.B. $h(\mathtt{a}\omega) = \omega$.

c) falsch, weil h schon nicht injektiv ist.

Aufgabe 3. Zur Erinnerung: Der Grad $d(v)$ eines Knotens $v \in V$ in einem Graphen $G = (V, E)$ ist definiert als die Anzahl der Knoten $w \in V$, so dass $(v, w) \in E$ ist.

a) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie: Durch $v \sim w \iff d(v) = d(w)$ wird eine Äquivalenzrelation auf V definiert.

b) Geben Sie für den folgenden Graphen die Äquivalenzklassen bzgl. der Äquivalenzrelation $\sim$ aus Teil a) an.



c) Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ zwei Graphen und $f\colon V_1 \to V_2$ eine bijektive Funktion. Für einen Knoten $v \in V_1$ gelte $d(v) < d(f(v))$. Warum kann es sich bei f nicht um einen Graphenisomorphismus handeln?

Lösung.

a) Seien $u, v, w \in V$.
Reflexivität: Auf jeden Fall gilt $d(v) = d(v)$, also $v \sim v$.
Symmetrie: Wenn $v \sim w$ gilt, dann $d(v) = d(w)$, dann $d(w) = d(v)$, dann $w \sim v$.
Transitivität: Wenn $u \sim v$ und $v \sim w$ gilt, dann $d(u) = d(v)$ und $d(v) = d(w)$, dann $d(u) = d(w)$, dann $u \sim w$.

b) $\{5, 6, 7, 8\}$ $(d = 1)$ und $\{1, 2, 3, 4\}$ $(d = 2)$.

c) Wenn f ein Graphenhomomorphismus ist, muss gelten $\forall\, v, w \in V_1 : (v, w) \in E_1 \iff (f(v), f(w)) \in E_2$.
Wenn $d(v) < d(f(v))$ gilt, dann hat v im Graph G_1 weniger Nachbarn als der Knoten $f(v)$ in G_2. Es muss also mindestens einen Nachbarn u von $f(v) \in V_2$ geben, der nicht das Bild von f von einem Nachbarn von v ist. Da f bijektiv (und damit surjektiv) ist, muss es trotzdem einen Knoten $x \in V_1$ geben mit $f(x) = u$. Dann gilt aber $(v, x) \notin E_1$ und $(f(v), f(x)) \in E_2$. Also kann f kein Isomorphismus sein.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die Gruppenoperation

$$S_4 \times \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^4, \qquad \pi * (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}).$$

a) Geben Sie die Bahn und den Stabilisator von $(1, 1, 2, 2)$ an.

b) Geben Sie ein Element von $\mathbb{Z}^4$ an, dessen Bahn genau zwölf Elemente hat.

c) Können zwei verschiedene Elemente, die zur gleichen Bahn gehören, den selben Stabilisator haben? (falls ja: Beispiel; falls nein: Begründung, warum nicht)

Lösung.

a) Bahn: $\{(1, 1, 2, 2), (1, 2, 1, 2), (2, 1, 1, 2), (1, 2, 2, 1), (2, 1, 2, 1), (2, 2, 1, 1)\} \subseteq \mathbb{Z}^4$
Stabilisator: $\langle (1\ 2), (3\ 4) \rangle \subseteq S_4$.

b) z. B. $(1, 2, 3, 3)$.

c) Ja, z. B. liegen $(1, 1, 2, 2)$ und $(2, 2, 1, 1)$ in der selben Bahn und haben den selben Stabilisator.

Aufgabe 5. Sei $\Omega = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, und sei $L = \{\omega \in \Omega^* : \omega \text{ enthält genau so viele } \mathtt{a}\text{s wie } \mathtt{b}\text{s}\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $h(n)$ die Anzahl der Wörter in L mit genau n Buchstaben.

a) Bestimmen Sie $h(0), h(1), h(2), h(3), h(4)$ durch Auflisten der entsprechenden Wörter.

b) Finden Sie eine allgemeine Formel für $h(n)$ und begründen Sie deren Korrektheit.

c) Geben Sie einen injektiven Worthomomorphismus $h\colon \{\mathtt{u}, \mathtt{v}\}^* \to \Omega^*$ mit $\operatorname{im} h = L$ an.

Lösung.

a) $h(0) = 1$ (das leere Wort), $h(1) = 0$, $h(2) = 2$ (ab, ba), $h(3) = 0$, $h(4) = 6$ (abab, abba, baab, baba, aabb, bbaa).

b) z.B. $h(n) = [[n \text{ gerade}]]\binom{n}{n/2}$. Begründung: Für ungerades n kann es keine Wörter mit gleicher Anzahl von as und bs geben. Für gerades n enthalten die Wörter genau $n/2$ viele as und $n/2$ bs. Jedes Wort ist in eindeutiger Weise bestimmt durch die Positionen, an denen die as stehen; an allen übrigen Stellen steht dann ein b. Die Frage ist also, wie viele Möglichkeiten es gibt, eine $n/2$-elementige Teilmenge aus $\{1, \dots, n\}$ auszuwählen. Diese Anzahl ist genau der Binomialkoeffizient.

c) *Hier ist mir leider ein Fehler unterlaufen: die ursprügliche Musterlösung zu dieser Teilaufgabe hat sich als inkorrekt herausgestellt, und vermutlich gibt es einen Worthomomorphismus mit der geforderten Eigenschaft gar nicht. Tut mir Leid. Ich habe die Teilaufgabe c) bei der Bewertung unberücksichtigt gelassen.*