

Name (deutlich lesbar!):

Matrikelnummer (deutlich lesbar!):

--	--	--	--	--	--	--

- Es sind keine anderen Hilfsmittel als ein Stift zugelassen, insbesondere keine Unterlagen und keine elektronischen Geräte. Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus.
- Die Antworten zur Aufgabe 1 sind auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Notieren Sie die Antworten für die weiteren Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten weissen Papier. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und legen Sie bei der Abgabe die Blätter in der Reihenfolge der Aufgaben zusammen, mit dem Aufgabenblatt als Deckblatt. Die abgegebenen Blätter werden oben links zusammengetackert. Halten Sie deshalb beim Schreiben genügend Abstand zu dieser Ecke.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Sie können die Teilnahme an der Klausur jederzeit ohne Abgabe einer Lösung beenden. Ein solcher Abbruch wird nicht als Fehlversuch gewertet.

Aufgabe 1. Wahr oder falsch?

	wahr	falsch
Wenn es eine injektive Abbildung $f: A \rightarrow B$ gibt, dann gilt $ A \leq B $	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Die Symmetriegruppe eines Quadrats hat genau vier Elemente	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Jeder Baum ist ein Graph	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$[9]_{\equiv_6}^{-1}$ existiert nicht	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\forall x, y \in \mathbb{Z} \forall a, b \in \mathbb{Z} : \gcd(x, y) \mid ax + by$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Kryptographie ist eine typische Anwendung für Pseudozufallszahlen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$B_3 = 5$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$1 = O(n)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$T(n) = 2T(n/2) + O(n) \Rightarrow T(n) = O(n \log(n))$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Lösung. wahr-falsch-wahr, wahr-wahr-falsch, wahr-wahr-wahr

Aufgabe 2. Sei $\Omega = \{a, b, c\}$ und sei $h: \Omega^* \rightarrow \Omega^*$ definiert durch $h(\omega) = \omega\omega$. Zeigen oder widerlegen Sie:

- a) h ist injektiv
- b) h ist surjektiv
- c) h ist bijektiv

Lösung.

- a) wahr, denn aus $h(\omega_1) = h(\omega_2)$ folgt $\omega_1\omega_1 = \omega_2\omega_2$, und wenn diese beiden Wörter identisch sind, dann müssen auch ihre jeweils ersten Hälften übereinstimmen, d.h. $\omega_1 = \omega_2$. Daraus folgt Injektivität.
- b) falsch, denn zum Beispiel liegt das Wort a nicht im Bild von h .
- c) auch falsch, weil h schon nicht surjektiv ist.

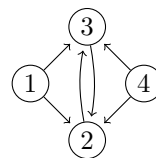
Aufgabe 3. Untersuchen Sie die folgenden Funktionsdefinitionen auf Repräsentantenunabhängigkeit.

- a) $f: \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}, f([x]_{\equiv 5}) = x^2$
- b) $g: \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5, g([x]_{\equiv 5}) = [x^2]_{\equiv 5}$.

Lösung.

- a) nicht repräsentantenunabhängig, denn z.B. gilt $3 \equiv_5 8$, also $[3]_{\equiv 5} = [8]_{\equiv 5}$, aber $3^2 = 9 \neq 64 = 8^2$.
- b) repräsentantenunabhängig, denn sind x, y so, dass $[x]_{\equiv 5} = [y]_{\equiv 5}$ gilt, also $x \equiv_5 y$, also $5 \mid x - y$, also $x = y + 5q$ für ein bestimmtes $q \in \mathbb{Z}$, also $x^2 = (y + 5q)^2 = y^2 + 10yq + 25q^2 = y^2 + 5(2yq + 5q^2)$, also $5 \mid x^2 - y^2$, also $x^2 \equiv_5 y^2$, wie gefordert.

Aufgabe 4. Sei $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (1, 3), (4, 2), (4, 3), (2, 3), (3, 2)\})$.



- a) Bestimmen Sie die Automorphismengruppe $\text{Aut}(G) \subseteq S_4$
- b) Diese Gruppe wird von zwei Elementen erzeugt. Von welchen?
- c) Geben Sie alle Quellen und Senken von G sowie einen Pfad der Länge 5 an.

Lösung.

- a) $\text{Aut}(G) = \{\text{id}, (2\ 3), (1\ 4), (2\ 3)(1\ 4)\}$
- b) $\text{Aut}(G) = \langle (2\ 3), (1\ 4) \rangle$
- c) Quellen: keine, Senken: 2, 3, Pfad: 1-2-3-2-3-2

Aufgabe 5.

- a) Bestimmen Sie $\binom{6}{4}$, indem Sie alle Teilmengen von $\{1, \dots, 6\}$ mit genau 4 Elementen auflisten.
- b) Welche Objekte müssten Sie auflisten, um $\binom{37}{14}$ zu bestimmen? (Sie müssen es nicht tun.)
- c) Zeigen Sie durch ein bijektives Argument, dass $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt.

Lösung.

- a) $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{1, 3, 5, 6\}, \{1, 4, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 6\}, \{2, 3, 5, 6\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}$, also $\binom{6}{4} = 15$.
- b) Alle Partitionen einer 37-elementigen Menge in genau 14 Teilmengen.
- c) Offenbar ist $U \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ genau dann eine Teilmenge mit k Elementen wenn ihr Komplement $\{1, \dots, n\} \setminus U$ eine Teilmenge mit $n - k$ Elementen ist. Wegen

$$\{1, \dots, n\} \setminus (\{1, \dots, n\} \setminus U) = U$$

ist die Abbildung, die jeder k -elementigen Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$ ihr Komplement zuordnet, bijektiv. Daraus folgt die Behauptung.