Diskrete Strukturen · Winter 16/17 · **Nullte Klausur** xx.02.2017

Name (deutlich lesbar): .....

Matrikelnummer (deutlich lesbar): | | | | | | | |

- Es sind keine anderen Hilfsmittel als ein Stift zugelassen, insbesondere keine Unterlagen und keine elektronischen Geräte. Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus.
- Die Antworten zu den Aufgaben 1 und 2 sind auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Notieren Sie die Antworten für die weiteren Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten weissen Papier. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und legen Sie bei der Abgabe die Blätter in der Reihenfolge der Aufgaben zusammen, mit dem Aufgabenblatt als Deckblatt. Die abgegebenen Blätter werden oben links zusammengetackert. Halten Sie deshalb beim Schreiben genügend Abstand zu dieser Ecke.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Sie können die Teilnahme an der Klausur jederzeit ohne Abgabe einer Lösung beenden. Ein solcher Abbruch wird nicht als Fehlversuch gewertet.

Aufgabe 1. Wahr oder falsch?

	wahr	falsch
Die Verkettung zweier injektiven Funktionen ist injektiv	☐	☐
$\gcd(6,9) = 18$	☐	☐
Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A, so gilt $[x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset$ für alle $x, y \in A$	☐	☐
Ist $\leq$ eine Ordnungsrelation, so kann es Elemente a, b mit $a \leq b \leq a$ geben	☐	☐
$[3]_{\equiv_5} \cap [5]_{\equiv_3} = \emptyset$	☐	☐
Jede Gruppe G mit $\lvert G\rvert \geq 2$ hat mindestens zwei Untergruppen	☐	☐
Ist $*\colon G \times X \to X$ eine Gr.-Operation und $x \in X$, so ist $G * x$ eine Untergr. von G	☐	☐
$\binom{4}{2} = 6$	☐	☐
$T(n) = 4T(n/2) + \mathrm{O}(\log(n)) \Rightarrow T(n) = \mathrm{O}(n^2)$	☐	☐

Lösung. wahr-falsch-falsch, wahr-falsch-wahr, falsch-wahr-wahr.

Aufgabe 2.

a) Ergänzen Sie die fehlenden Stellen im folgenden Algorithmus:

Input: $x, y \in \mathbb{Z}$
Output: $g = \gcd(x, y)$

1 $(g, g') = (x, y)$

2 while $g' \neq 0$

3 $\quad (g, g') = (g', \square)$

4 return $\square$

b) Was berechnet der erweiterte euklidische Algorithmus außer $\gcd(x, y)$ noch?

Lösung. a) $\mathrm{mod}(g, g')$, g, b) $a, b \in \mathbb{Z}$ so dass $\gcd(x, y) = ax + by$

Aufgabe 3. Seien A, B zwei Mengen, sei $a \in A$ fix. Für zwei Funktionen $f, g\colon A \to B$ sei definiert $f \sim g \iff f(a) = g(a)$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge B^A aller Funktionen $A \to B$ ist.

Lösung.

- Reflexivität: Für jede Funktion f gilt jedenfalls $f(a) = f(a)$, also $f \sim f$.
- Symmetrie: Wenn $f \sim g$ gilt, gilt $f(a) = g(a)$, dann $g(a) = f(a)$, also $g \sim f$.
- Transitivität: Wenn $f \sim g$ und $g \sim h$ gilt, gilt $f(a) = g(a)$ und $g(a) = h(a)$, dann $f(a) = h(a)$, also $f \sim h$.

Aufgabe 4. Sei $\Omega = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}\}$, für $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^*$ gelte $\omega_1 \sim \omega_2$, falls sich ω_1, ω_2 durch durch Groß- und Kleinschreibung voneinander unterscheiden. Mit $\mathrm{lower}\colon \Omega^* \to \Omega^*$ sei die Funktion bezeichnet, die ein gegebenes Wort $\omega \in \Omega^*$ auf das Wort $\mathrm{lower}(\omega) \in \Omega^*$ abbildet, das aus ω entsteht, indem man jeden Großbuchstaben durch den entsprechenden Kleinbuchstaben ersetzt, z.B. $\mathrm{lower}(\mathtt{aCbAB}) = \mathtt{acbab}$.

a) Geben Sie die Elemente von $[\mathtt{ac}]_\sim \in \Omega^*/\!\sim$ an.

b) Untersuchen Sie die Funktion lower auf Injektivität und Surjektivität.

c) Begründen Sie, dass $f\colon \Omega^*/\!\sim \to \Omega^*$, $f([\omega]_\sim) = \mathrm{lower}(\omega)$ eine gültige Funktionsdefinition ist.

Lösung.

a) $[\mathtt{ac}]_\sim = \{\mathtt{ac}, \mathtt{Ac}, \mathtt{aC}, \mathtt{AC}\}$.

b) Die Funktion ist nicht injektiv, denn z.B. gilt $\mathrm{lower}(\mathtt{A}) = \mathrm{lower}(\mathtt{a})$, obwohl $\mathtt{a} \neq \mathtt{A}$ gilt. Die Funktion ist auch nicht surjektiv, weil z.B. $\mathtt{A}$ nicht im Bild von lower liegt.

c) Sind $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^*$ so, dass $[\omega_1]_\sim = [\omega_2]_\sim$ gilt, so gilt $\omega_1 \sim \omega_2$, und das bedeutet nach Definition von $\sim$, dass sich ω_1, ω_2 nur in Groß- und Kleinschreibung unterscheiden. Nach Ersetzung aller Großbuchstaben durch Kleinbuchstaben unterscheiden sich die Wörter also gar nicht mehr, d.h. es gilt $\mathrm{lower}(\omega_1) = \mathrm{lower}(\omega_2)$, wie gefordert.

Aufgabe 5. Sei G eine endliche Menge und $\circ\colon G \to G$ eine Verknüpfung.

a) Angenommen $(G, \circ)$ ist eine Gruppe. Erklären Sie, warum in der Verknüpfungstabelle von $\circ$ dann jedes Element von G in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal vorkommt.

b) Angenommen, in der Verknüpfungstabelle von $\circ$ kommt jedes Element von G in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal vor. Folgt daraus, dass $(G, \circ)$ eine Gruppe ist? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Lösung.

a) Angenommen, das Element g kommt in der Spalte u zweimal vor, etwa in der Zeile v_1 und der Zeile v_2. Dann gilt also $v_1 \circ u = g$ und $v_2 \circ u = g$. Da G eine Gruppe ist, ist u invertierbar. Multiplikation der beiden Gleichungen mit u^{-1} von rechts liefert $v_1 = g \circ u^{-1}$ und $v_2 = g \circ u^{-1}$, also $v_1 = v_2$, im Widerspruch zur Annahme.

   Analog für doppelte Vorkommen in einer Zeile; in diesem Fall ist eine Multiplikation von links nötig.

b) nein. Gegenbeispiel: $(\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, \circ)$ mit $\circ$ definiert durch

$\circ$	a	b	c
a	a	c	b
b	b	a	c
c	c	b	a

   hat kein Neutralelement, kann also keine Gruppe sein.

Aufgabe 6. Es seien $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ zwei isomorphe Graphen und $h\colon V_1 \to V_2$ ein Graphenisomorphismus. Zeigen Sie:

a) Für alle $\pi \in \mathrm{Aut}(G_1)$ gilt $h \circ \pi \circ h^{-1} \in \mathrm{Aut}(G_2)$.

b) $H\colon \mathrm{Aut}(G_1) \to \mathrm{Aut}(G_2)$, $H(\pi) = h \circ \pi \circ h^{-1}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

c) Die Funktion H aus b) ist sogar ein Gruppenisomorphismus.

Lösung.

a) Sei $\pi \in \mathrm{Aut}(G_1)$ und $\sigma = h \circ \pi \circ h^{-1}$. Zunächst ist klar, dass σ als Verkettung bijektiver Funktionen bijektiv ist. Weiters ist zu zeigen, dass für alle $u, v \in V_2$ gilt $(u, v) \in E_2 \iff (\sigma(u), \sigma(v)) \in E_2$. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
(u,v) \in E_2 &\iff (h^{-1}(u), h^{-1}(v)) \in E_1 && \text{(weil } h \text{ Graphenisomorphismus ist)}\\
&\iff (\pi(h^{-1}(u)), \pi(h^{-1}(v))) \in E_1 && \text{(weil } \pi \in \mathrm{Aut}(G_1) \text{ ist)}\\
&\iff (h(\pi(h^{-1}(u))), h(\pi(h^{-1}(v)))) \in E_2 && \text{(weil } h \text{ Graphenisomorphismus ist)}\\
&\iff (\sigma(u), \sigma(v)) \in E_2 && \text{(nach Def. von } \sigma\text{)},
\end{aligned}$$

wie gefordert.

b) Sind $\pi, \sigma \in \mathrm{Aut}(G_1)$, so gilt

$$H(\pi \circ \sigma) = h \circ \pi \circ \sigma \circ h^{-1} = h \circ \pi \circ h^{-1} \circ h \circ \sigma \circ h^{-1} = H(\pi) \circ H(\sigma),$$

wie gefordert.

c) Offenbar ist $G\colon \mathrm{Aut}(G_2) \to \mathrm{Aut}(G_1)$, $G(\sigma) = h^{-1} \circ \sigma \circ h$ eine Umkehrfunktion.

Aufgabe 7. Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ zwei Graphen. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Wenn G_1 und G_2 isomorph sind, dann gilt $|V_1| = |V_2|$.

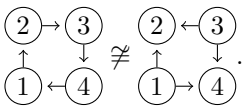
b) Wenn $h\colon V_1 \to V_2$ eine bijektive Funktion ist, dann ist auch $H\colon E_1 \to E_2$, $H((u, v)) := (h(u), h(v))$ eine bijektive Funktion.

c) Wenn $|V_1| = |V_2|$ und $|E_1| = |E_2|$ gilt, dann sind G_1 und G_2 isomorph.

Lösung.

a) wahr, denn wenn G_1, G_2 isomorph sind, dann gibt es einen Isomorphismus $h\colon V_1 \to V_2$. Da ein Isomorphismus immer eine bijektive Funktion ist, folgt $|V_1| = |V_2|$.

b) falsch, denn z.B. bei $V_1 = V_2 = \{1, 2, 3\}$ und $G_1 = (V_1, V_1 \times V_1)$ und $G_2 = (V_2, \emptyset)$ ist das vorgeschlagene H gar keine Funktion, weil z.B. $H((1, 1)) = (1, 1) \notin \emptyset$.

c) falsch, Gegenbeispiel: 

.

Aufgabe 8.

a) Bestimmen Sie die Bell-Zahl B_4, indem Sie alle Partitionen von $\{1, 2, 3, 4\}$ angeben.

b) Eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ heißt *quadratfrei,* wenn sie das Produkt von paarweise verschiedenen Primzahlen ist. (Beispiel: $10 = 2 \cdot 5$ ist quadratfrei, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ ist nicht quadratfrei.) Zeigen Sie mithilfe eines bijektiven Arguments, dass eine quadratfreie Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ verschiedenen Primfaktoren sich auf genau B_n viele verschiedene Weisen als Produkt von Faktoren in $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ schreiben lässt. (Beispiel: $30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.)

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass jedes $N \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat.

Lösung.

a) $\{\{1,2,3,4\}\}$, $\{\{1\},\{2,3,4\}\}$, $\{\{2\},\{1,3,4\}\}$, $\{\{3\},\{2,1,4\}\}$, $\{\{4\},\{2,3,1\}\}$, $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$, $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$, $\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$, $\{\{1\},\{3\},\{2,4\}\}$, $\{\{1\},\{4\},\{2,3\}\}$, $\{\{2\},\{3\},\{1,4\}\}$, $\{\{2\},\{4\},\{1,3\}\}$, $\{\{3\},\{4\},\{1,2\}\}$, $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$, also ist $B_4 = 15$.

b) Sei $N = p_1 p_2 \cdots p_n$ eine Zahl mit n verschiedenen Primfaktoren.

Sei $\{U_1, \ldots, U_k\}$ eine Partition von $\{1, \ldots, n\}$. Für $i = 1, \ldots, k$ definieren wir $q_i = \prod_{j \in U_i} p_j$ und ordnen der Partition die Faktorisierung $q_1 \cdots q_k$ zu. Weil $\{U_1, \ldots, U_k\}$ eine Partition ist, gilt $\bigcup_{k=1}^{n} U_k = \{1, \ldots, n\}$ und $U_i \cap U_j = \emptyset$ für $i \neq j$, und deshalb $\prod_{i=1}^{k} q_k = \prod_{i=1}^{k} \prod_{j \in U_i} p_j = p_1 \cdots p_n = N$, wie gefordert.

Ist umgekehrt $N = q_1 \cdots q_k$ eine beliebige Faktorisierung von N, dann gibt es für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ genau ein j so dass $p_i \mid q_j$, weil N nach Annahme quadratfrei ist und die Primfaktorzerlegung eindeutig ist. Definiert man also $U_j = \{\, i \in \{1, \ldots, n\} : p_i \mid q_j \,\}$ für $j = 1, \ldots, k$, so ist $\{U_1, \ldots, U_k\}$ eine Partition von $\{1, \ldots, n\}$.