Lineare Algebra und Analytische Geometrie I · Winter 2015/16 · **Dritte Klausur** 04.07.2016

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!): | | | | | | | |

- Es sind keine anderen Hilfsmittel als ein Stift zugelassen, insbesondere keine Unterlagen und keine elektronischen Geräte. Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus.
- Die Antworten zu Aufgabe 1 sind auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Notieren Sie die Antworten für die weiteren Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten weissen Papier. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und legen Sie bei der Abgabe die Blätter in der Reihenfolge der Aufgaben zusammen, mit dem Aufgabenblatt als Deckblatt. Die abgegebenen Blätter werden oben links zusammengetackert. Halten Sie deshalb beim Schreiben genügend Abstand zu dieser Ecke.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Sie können die Teilnahme an der Klausur jederzeit ohne Abgabe einer Lösung beenden. Ein solcher Abbruch wird nicht als Fehlversuch gewertet.

Aufgabe 1. Wahr oder falsch?

	wahr	falsch
Für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt $AB \neq BA$	☐	☐
$[3]_{\sim_2} \cap [2]_{\sim_3} \neq \emptyset$	☐	☐
Jede Permutation ist invertierbar	☐	☐
Jeder injektive Homomorphismus ist bijektiv	☐	☐
$\dim V/U = \dim V - \dim U$	☐	☐
Ist $(R, +, \cdot)$ ein Ring, so ist $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe	☐	☐
Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar, so gilt $\ker A = \ker A^{-1} = \ker A^\top$	☐	☐
Für jede lineare Abbildung $h\colon V \to V$ gilt $V = \ker h \oplus \operatorname{im} h$	☐	☐
In jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum V gilt $\alpha v = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \wedge v = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in V$	☐	☐
$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \in \{-1, 1\}$ ist.	☐	☐
$\mathbb{K}[X]$ hat einen Unterraum, der zu $\mathbb{K}^{17}$ isomorph ist	☐	☐
Eine Basis ist immer ein Erzeugendensystem	☐	☐

Lösung. falsch-wahr-wahr, falsch-wahr-falsch, wahr-falsch-falsch, falsch-wahr-wahr.

Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = 3n - 5$ injektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion aus Teil a) nicht surjektiv ist.

c) Geben Sie eine surjektive Funktion von $\{\square, \blacksquare, \triangle\}$ nach $\{\bigcirc, \blacktriangle\}$ an.

d) Zeigen Sie, dass es für jede injektive Funktion $f\colon A \to B$ eine Teilmenge $C \subseteq B$ gibt, so dass $g\colon A \to C$ mit $g(x) = f(x)$ bijektiv ist.

Lösung.

a) Seien $n, m \in \mathbb{Z}$ so, dass $f(n) = f(m)$ gilt. Dann gilt $3m - 5 = 3n - 5$, und daraus folgt sofort $n = m$. Damit ist f injektiv.

b) Wir zeigen: es gibt kein $n \in \mathbb{Z}$, so dass $f(n) = 0 \in \mathbb{Z}$. In der Tat würde aus $3n - 5 = 0$ folgen, dass $3n = 5$. Für jede Wahl von $n \in \mathbb{Z}$ ist die linke Seite dieser Gleichung durch drei teilbare, die rechte aber nicht. Damit kann es so ein n nicht geben.

c) z.B. $f(\square) = \bigcirc$, $f(\blacksquare) = \bigcirc$, $f(\triangle) = \blacktriangle$.

d) Wähle $C = f(A)$. Dann ist g injektiv, weil f injektiv ist, und g ist surjektiv nach Wahl von C.

Aufgabe 3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 5}$$

und $h\colon \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^4$, $h(x) = Ax$.

a) Zeigen Sie, dass $y = (3, -5, 4, -3) \in \operatorname{im} A$, indem Sie ein $x \in \mathbb{Q}^5$ mit $h(x) = y$ konstruieren.

b) Wie lauten die Dimensionen von $\ker A$, $\operatorname{im} A$, $\mathbb{Q}^5/\ker A$, und $\mathbb{Q}^4/\operatorname{im} A$?

c) Die Matrix A ist als Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{Q}^5$ und $\mathbb{Q}^4$ zu verstehen. Wie lautet die Abbildungsmatrix von h bezüglich der geordneten Basis

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{Q}^5$ und der Standardbasis von $\mathbb{Q}^4$?

Lösung.

a) Durch Lösen eines inhomogenen linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\
3 & 1 & -1 & 2 & 1 & -5 \\
-1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\
-1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -3
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
-3 \\ + \\ + \\ +
\end{array}
\\[1em]
\leftrightarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 4 & 2 & 2 & -2 & -14 \\
0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
+ \\ + \\ 2 \quad -1/2 \quad |\,(-\tfrac{1}{2}) \\
\end{array}
\\[1em]
\leftrightarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\
0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & -7/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Daraus folgt $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{7}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} -1/2 \\ -7/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Nach obiger Rechnung gilt $\operatorname{Rank}(A) = 2$. Deshalb: $\dim \ker A = 5 - 2 = 3$, $\dim \operatorname{im} A = 2 = 2$, $\dim \mathbb{Q}^5/\ker A = 5 - 3 = 2$, $\dim \mathbb{Q}^4/\operatorname{im} A = 4 - 2 = 2$.

c)

$$
\begin{pmatrix}
1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\
3 & 1 & -1 & 2 & 1 \\
-1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & 1 & 1 & 0 & -1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
3 & 4 & 3 & 5 & 6 \\
-1 & -2 & -2 & -3 & -3 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

Aufgabe 4. Sei $V = \mathbb{K}[X]^*$ der Dualraum von $\mathbb{K}[X]$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $b_i \in V$ definiert durch $b_i(p_0 + p_1X + \cdots + p_nX^n) = p_i$ falls $i \leq n$ und $b_i(p) = 0$ falls $i > \deg(p)$. Sei $B = \{b_1, b_2, \dots\} \subseteq V$.

a) Zeigen Sie: Die Menge B ist linear unabhängig.

b) Sei $E \in V$ definiert durch $E(p_0 + p_1X + \cdots + p_nX^n) := p_0 + p_1 + \cdots + p_n$. Zeigen Sie: $E \notin \langle B \rangle$.

Hinweis: Formulieren Sie einen Widerspruchsbeweis und verwenden Sie dabei, dass Linearkombinationen immer endliche Summen sein müssen.

Lösung.

a) Seien $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$ paarweise verschieden, und seien $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{K}$ so, dass $c_1b_{i_1} + \cdots + c_mb_{i_m} = 0$. Zu zeigen: $c_1 = \cdots = c_m = 0$. Für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt $(c_1b_{i_1} + \cdots + c_mb_{i_m})(X^{i_j}) = c_j = 0$, wie gefordert.

b) Angenommen, $E \in \langle B \rangle$. Dann ist E eine Linearkombination endlich vieler Elemente aus B, etwa $E = c_1b_{i_1} + \cdots + c_mb_{i_m}$ für gewisse $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$ und $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{K}$. Für jedes $i > \max(i_1, \dots, i_m)$ gilt aber $(c_1b_{i_1} + \cdots + c_mb_{i_m})(X^i) = 0$, während $E(X^i) = 1$. Widerspruch.