Lineare Algebra und Analytische Geometrie I · Winter 2015/16 · **Zweite Klausur** 30.03.2016

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!): | | | | | | | |

- Es sind keine anderen Hilfsmittel als ein Stift zugelassen, insbesondere keine Unterlagen und keine elektronischen Geräte. Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus.
- Die Antworten zu Aufgabe 1 sind auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Notieren Sie die Antworten für die weiteren Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten weissen Papier. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und legen Sie bei der Abgabe die Blätter in der Reihenfolge der Aufgaben zusammen, mit dem Aufgabenblatt als Deckblatt. Die abgegebenen Blätter werden oben links zusammengetackert. Halten Sie deshalb beim Schreiben genügend Abstand zu dieser Ecke.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Sie können die Teilnahme an der Klausur jederzeit ohne Abgabe einer Lösung beenden. Ein solcher Abbruch wird nicht als Fehlversuch gewertet.

Aufgabe 1. Ergänzen Sie die fehlenden Ausdrücke auf den rechten Seiten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \end{pmatrix}$$

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \langle \qquad , \qquad , \qquad \rangle$$

$$\frac{1}{[7]_{\sim_5}} \cap \{0, 1, \dots, 4\} =$$

$$[7]_{\sim_5}^{401} \cap \{0, 1, \dots, 4\} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{sgn}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\dim_{\mathbb{K}} \big((\mathbb{K}^d \times \mathbb{K}^n) \otimes (\mathbb{K}^m / \langle (1, 1, \dots, 1) \rangle) \big) =$$

Lösung. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$, $\{3\}$, $\{2\}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, 1, $(n+d)(m-1)$.

Aufgabe 2. Seien A, B Mengen und $a \in A$ ein fest gewähltes Element. Sie haben in einem Minitest bewiesen, dass durch $f \sim g :\Longleftrightarrow f(a) = g(a)$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge B^A aller Funktionen $f\colon A \to B$ erklärt wird. Es sei nun

$$h\colon B^A/{\sim} \to B, \quad h([f]_\sim) := f(a).$$

Zeigen Sie:

a) h ist wohldefiniert.

b) h ist injektiv.

c) h ist surjektiv.

Lösung.

a) Zu zeigen: für alle $f, g \in B^A$ mit $[f]_\sim = [g]_\sim$ gilt $h([f]_\sim) = h([g]_\sim)$.
Seien also $f, g \in B^A$ beliebig mit $[f]_\sim = [g]_\sim$. Dann gilt $f \sim g$, damit $f(a) = g(a)$ nach Definition von $\sim$, und damit $h([f]_\sim) = h([g]_\sim)$ nach Definition von h.

b) Die Funktion h ist injektiv, denn für $[f]_\sim, [g]_\sim \in B^A/{\sim}$ mit $h([f]_\sim) = h([g]_\sim)$ gilt $f(a) = g(a)$, also $f \sim g$, also $[f]_\sim = [g]_\sim$.

c) Die Funktion h ist surjektiv, denn für jedes $b \in B$ gibt es eine Funktion $f\colon A \to B$ mit $f(a) = b$, zum Beispiel die konstante Funktion mit $f(x) = a$ für alle $x \in A$.

Aufgabe 3. Es seien

$$A_1 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \}, \qquad A_2 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \} \subseteq V := \mathbb{Q}^4.$$

Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass sowohl A_1 als auch A_2 linear unabhängig sind. Es seien $U_1 = \langle A_1 \rangle$ und $U_2 = \langle A_2 \rangle$ die von A_1 bzw. A_2 erzeugten Unterräume von V.

a) Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

b) Geben Sie die Dimensionen von $U_1 + U_2$, V/U_1 und $(U_1 + U_2)/(U_1 \cap U_2)$ an.

c) Konstruieren Sie eine lineare Abbildung $h\colon V \to V$ mit $\ker h = U_1$ und $\operatorname{im} h = U_2$.

Lösung.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad | \cdot (-1)$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass $\{-5 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}\}$ eine Basis für $U_1 \cap U_2$ ist.

b) Aus $\dim U_1 = \dim U_2 = 2$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$ folgt $\dim(U_1 + U_2) = 2 + 2 - 1 = 3$, $\dim(V/U_1) = 4 - 2 = 2$ und $\dim(U_1 + U_2)/(U_1 \cap U_2) = 3 - 1 = 2$.

c) Es ist offensichtlich, dass $A_1 \cup \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ eine Basis von V ist. Nach Satz der Vorlesung ist eine lineare Abbildung durch die Funktionswerte auf einer beliebig gewählten Basis eindeutig charakterisiert. Insbesondere gibt es eine lineare Abbildung $h\colon V \to V$ mit $h(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}) = 0$, $h(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = 0$, $h(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Diese Abbildung h hat die gewünschten Eigenschaften.

Aufgabe 4. Es sei $V = \mathbb{K}^{n \times n}$ und $M \in V$ fix. Die Abbildung $h\colon V \to V$ sei definiert durch $h(A) = AM - MA$. Zeigen Sie:

a) h ist eine lineare Abbildung.

b) Wenn $A \in \ker h$ und A invertierbar ist, gilt auch $A^{-1} \in \ker h$ und $AM \in \ker h$.

c) $\dim \operatorname{im} h < n^2$.

Lösung.

a) Für beliebige $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ und $A_1, A_2 \in V$ gilt $h(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)M - M(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = \alpha_1 A_1 M + \alpha_2 A_2 M - M\alpha_1 A_1 - M\alpha_2 A_2 = \alpha_1(A_1 M - MA_1) + \alpha_2(A_2 M - MA_2) = \alpha_1 h(A_1) + \alpha_2 h(A_2)$

b) Für $A \in \ker h$ gilt $AM - MA = 0$, d.h. $AM = MA$. Multiplikation mit A^{-1} von rechts und links liefert $MA^{-1} = A^{-1}M$, d.h. $A^{-1}M - MA^{-1} = 0$, d.h. $A^{-1} \in \ker h$.

Zweitens: aus $A \in \ker h$ folgt $AM = MA$. Daraus folgt $(AM)M = (MA)M = M(AM)$, also $(AM)M - M(AM) = 0$, also $AM \in \ker A$.

c) Es gilt $\dim V = n^2$ und $\dim \ker h + \dim \operatorname{im} h = \dim V$. Deshalb genügt es zu zeigen, dass $\dim \ker h \geq 1$ ist. Offensichtlich gilt $I_n M - MI_n = M - M = 0$ also $I_n \in \ker h$, also $\ker h \neq \{0\}$, also $\dim \ker h \geq 1$, wie gewünscht.