Lineare Algebra und Analytische Geometrie I · Winter 2015/16 · **Erste Klausur** 09.02.2016

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!):

- Es sind keine anderen Hilfsmittel als ein Stift zugelassen, insbesondere keine Unterlagen und keine elektronischen Geräte. Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus.
- Die Antworten zu Aufgabe 1 sind auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Notieren Sie die Antworten für die weiteren Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten weissen Papier. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und legen Sie bei der Abgabe die Blätter in der Reihenfolge der Aufgaben zusammen, mit dem Aufgabenblatt als Deckblatt. Die abgegebenen Blätter werden oben links zusammengetackert. Halten Sie deshalb beim Schreiben genügend Abstand zu dieser Ecke.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Sie können die Teilnahme an der Klausur jederzeit ohne Abgabe einer Lösung beenden. Ein solcher Abbruch wird nicht als Fehlversuch gewertet.

Aufgabe 1. Ergänzen Sie die fehlenden Ausdrücke auf den rechten Seiten.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \langle \qquad , \qquad , \qquad \rangle$$

$$[5]_{\sim_7} \cap \{-8, -4, -2, -1, 0, 1, 2, 4, 8\} =$$

$$\frac{1}{[5]_{\sim_7}} \cap \{0, \ldots, 6\} =$$

$$[2]_{\sim_7}^{300} \cap \{0, \ldots, 6\} =$$

$$(1\ 5)(3\ 2\ 6)(4\ 8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & & & & & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$$

Lösung. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad 5, \quad \langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle, \quad \{-2\}, \quad \{3\}, \quad \{1\},$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 8 & 1 & 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$

Aufgabe 2. Sei V ein Vektorraum und sei $U \subseteq \mathcal{P}(V)$ die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen von V. Für $A_1, A_2 \in U$ sei definiert

$$A_1 \sim A_2 \iff A_1 \cup A_2 \text{ ist linear unabhängig.}$$

Untersuchen Sie, ob es sich bei $\sim$ um eine Äquivalenzrelation handelt. Geben Sie dazu für jede der drei nötigen Bedingungen einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Lösung.

- Reflexivität ist erfüllt: Sei $A \in U$ beliebig. Nach Definition von U ist A linear unabhängig. Dann ist auch $A \cup A = A$ linear unabhängig. Also gilt $A \sim A$.
- Symmetrie ist erfüllt: Sind $A, B \in U$ beliebig mit $A \sim B$, dann ist $A \cup B$ linear unabängig, dann ist $B \cup A = A \cup B$ linear unabhängig. Also gilt $B \sim A$.
- Transitivität ist nicht erfüllt. Gegenbeispiel: $V = \mathbb{R}^3$, $A_1 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$, $A_2 = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$, $A_3 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$.

  Es ist leicht zu sehen, dass A_1, A_2, A_3 alle linear unabhängig sind und dass $A_1 \sim A_2$ und $A_2 \sim A_3$ gilt.

  Gleichzeitig gilt jedoch $A_1 \not\sim A_3$, weil $A_1 \cup A_3$ als vier-elementige Teilmenge eines dreidimensionalen Vektorraums nicht linear unabhängig sein kann.

Es handelt sich also nicht um eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 5}$$

und $h\colon \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^4$, $h(x) = Ax$.

a) Zeigen oder widerlegen Sie $(-3, 0, 1, 1, 1) \in \ker A$.

b) Berechnen Sie eine Basis von $\ker A$.

c) Bestimmen Sie den Rang von A sowie die Dimensionen von $\ker A$, $\operatorname{im} A$, $\operatorname{coker} A$ und $\operatorname{coim} A$.

d) Geben Sie eine Basis von $\mathbb{Q}^5 / \ker A$ an.

e) Geben Sie eine geordnete Basis B von $\mathbb{Q}^5$ an, so dass die Abbildungsmatrix von h bezüglich B und der Standardbasis von $\mathbb{Q}^4$ eine maximale Anzahl von Nullspalten hat.

Lösung.

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der fragliche Vektor gehört also zu $\ker A$.

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\ker A$ ist.

Es gibt in diesem Zusammenhang offenbar noch Begriffs- und Notationsverwirrung. Beachten Sie: $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist eine Menge, die außer v_1, v_2, v_3 keine weiteren Elemente enthält, während $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ die Menge ist, die aus allen Linearkombinationen von v_1, v_2, v_3 besteht. Eine Menge $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ kann niemals die Basis eines Vektorraums sein. Eine typische Situation ist, dass $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V$ eine Basis von $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq V$ ist.

Wenn jemand richtige Vektoren und falsche Klammern notiert hat, habe ich das trotzdem als richtig gewertet.

c) Nach obiger Rechnung ist $\operatorname{Rang} A = 2$ und daraus folgt ohne weitere Rechnung $\dim \ker A = 3$, $\dim \operatorname{im} A = 2$, $\dim \operatorname{coker} A = 2$, $\dim \operatorname{coim} A = 2$.

d) Nach Satz der Vorlesung bilden die Klassen der Basiselemente eines Komplementärraums von $\ker A$ eine Basis von $\mathbb{Q}^5 / \ker A$. Eine Basis eines Komplementärraums von $\ker A$ lässt sich aus der oben berechneten Basis ablesen, z.B. ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine mögliche Wahl.

Damit ist also

$$\{[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}]_\sim, [\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}]_\sim\}$$

eine Basis von $\mathbb{Q}^5/\ker A$.

e) Eine maximale Anzahl von Nullspalten in der Abbildungsmatrix ergibt sich genau dann, wenn B eine Basis von $\ker A$ enthält. Eine mögliche Wahl ist also

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die letzten drei Spalten der Abbildungsmatrix bezüglich dieser Basis sind Null.

Aufgabe 4. Seien V, W zwei endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Sei U_V ein Unterraum von V und U_W ein Unterraum von W.

a) Zeigen Sie: wenn $\dim U_V + \dim U_W = \dim V$ gilt, dann gibt es eine lineare Abbildung $h\colon V \to W$ mit $\ker h = U_V$ und $\operatorname{im} h = U_W$.

b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die lineare Abbildung h aus a) nicht eindeutig durch U_V und U_W festgelegt ist.

c) Begründen Sie, warum es ohne die Voraussetzung $\dim U_V + \dim U_W = \dim V$ keine lineare Abbildung wie in a) geben kann.

Lösung.

a) Sei $\{a_1, \dots, a_k\}$ eine Basis von U_V und seien $a_{k+1}, \dots, a_n \in V$ so, dass $\{a_1, \dots, a_n\}$ eine Basis von V ist. Solche $a_{k+1}, \dots, a_n$ existieren nach dem Basisergänzungssatz. Sei $\{b_1, \dots, b_d\}$ eine Basis von U_W. Nach Voraussetzung gilt dann $d = n - k$.

Nach Satz der Vorlesung gibt es eine lineare Abbildung $h\colon V \to W$ mit $h(a_1) = \dots = h(a_k) = 0$ und $h(a_{k+1}) = b_1, \dots, h(a_n) = b_d$. Wir zeigen, dass h die geforderten Eigenschaften hat.

Es gilt offensichtlich $\operatorname{im} h = U_W$ und $U_V \subseteq \ker h$. Um zu sehen, dass $\ker h \subseteq U_V$ gilt, betrachte ein beliebiges Element $x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + \alpha_{k+1} a_{k+1} + \dots + \alpha_n a_n$ von $\ker h$. Dann gilt $h(x) = \alpha_1 h(a_1) + \dots + \alpha_n h(a_n) = \alpha_{k+1} b_1 + \dots + \alpha_n b_d = 0$, woraus wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{b_1, \dots, b_d\}$ folgt $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$. Damit ist $x \in \langle a_1, \dots, a_k \rangle = U_V$, wie behauptet. *(Wenn h richtig angegeben war, gab es für das Fehlen dieses Nachweises keinen Abzug.)*

Viele haben versucht, mit der Formel $\dim \ker h + \operatorname{im} \ker h = \dim V$ *zu arbeiten. Die bringt hier aber noch gar nichts, sondern erst im Teil c). Die Formel* $\dim(U_V + U_W) = \dim U_W + \dim U_V - \dim(U_V \cap U_W)$ *passt auch nicht, weil es sich bei U_W nicht um einen Unterraum von V handelt, sondern um einen Unterraum von W.*

b) Betrachte $V = W = \mathbb{R}^2$, $U_V = \langle \binom{1}{0} \rangle$, $U_W = \langle \binom{1}{1} \rangle$. Setze $a_1 = \binom{1}{0}$, $b_1 = \binom{1}{1}$. Eine mögliche Wahl für a_2 ist $\binom{0}{1}$, mit dieser ergibt sich

$$h\colon V \to W, \quad h(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Eine andere mögliche Wahl für a_2 ist $-\binom{0}{1}$, und mit dieser bekommt man

$$\tilde{h}\colon V \to W, \quad h(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x.$$

Sowohl h als auch $\tilde{h}$ haben die geforderte Eigenschaft, es gilt aber offensichtlich $h \neq \tilde{h}$.

c) Nach Satz der Vorlesung gilt für jede lineare Abbildung $\dim \ker h + \dim \operatorname{im} h = \dim V$.