Übungsblatt 9

Besprechung am **11.1.2016**

Aufgabe 1 [schriftlich für Student_innen mit Matrikelnummer, sodass $M \sim_3 1$ gilt] Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$. Es sei $V = \mathbb{K}^2$. Es sei

$$f : V \to V,\ (a, b) \mapsto (a^2, b^2).$$

Man zeige oder widerlege die Behauptung, daß f linear ist.

Aufgabe 2 (Lösen von Differentialgleichungen). Es sei $V := \mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum aller Polynome von Grad höchstens 3. Es sei $f : V \to V$ die lineare Abbildung $P \mapsto P'' + P$.

a) Ist f bijektiv? Gilt die Antwort auch dann noch, wenn man $\mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ durch $\mathbb{Q}[x]_{\leq 4}$, $\mathbb{Q}[x]_{\leq 5}$ usw. ersetzt?

b) Es sei $Q := x^3 + x^2 + x + 1 \in V$. Man berechne $f^{-1}(Q)$.

Aufgabe 3 Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Es sei $V := \mathbb{K}^{2\times 2}$. Es sei $A \in V$ die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Es sei

$$f : V \to V, X \mapsto A \cdot X.$$

Offensichtlich ist f eine lineare Abbildung. Man bestimme $\ker f$ und $\mathrm{im} f$.

Aufgabe 4 Es sei V der Unterraum von $\mathbb{Q}^4$, der von den beiden Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt ist. Man berechne eine Basis für einen Komplementärraum von V in $\mathbb{Q}^4$.

Aufgabe 5 Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Es seien V_1, V_2, V_3 endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$. Es seien $f : V_1 \to V_2$ und $g : V_2 \to V_3$ lineare Abbildungen. Man zeige oder widerlege

$$\dim(\ker(g \circ f)) \leq \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)).$$

Hinweis: Man berechne den Kern und das Bild der linearen Abbildung

$$f|_{\ker(g\circ f)} : \ker(g \circ f) \to V_2$$

und wende einen geeigneten Satz aus Kapitel 16 an.

Aufgabe 6 (Diese Aufgabe kann nicht gekreuzt werden.) Es sei V der Vektorraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$. Es sei U der Teilraum $\mathbb{Q} \subset V$. Nach der Bemerkung auf Seite 98 – vor Satz 45 – besitzt U einen Komplementärraum. Versuchen Sie, einen Komplementärraum W von U zu berechnen.