Übungsblatt 8

Besprechung am **14.12.2015**

Aufgabe 1 Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times m}$, so dass $A \leftrightarrow B$ ($\leftrightarrow$ aus Definition 24).

a) Zeigen Sie: Die Zeilen von A bilden eine Basis des Vektorraums V genau dann, wenn die Zeilen von B eine Basis von V bilden.

b) Zeigen Sie: Ist B in Treppenform, so bilden die von 0 verschiedenen Zeilen von B eine Basis des von den Zeilen von A aufgespannten Vektorraums.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie jeweils eine Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraums V und ergänzen Sie diese zu einer Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraums W.

a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W = \mathbb{R}^3$.

b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W = \mathbb{R}^3$.

c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W = \mathbb{R}^4$.

d) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$, V wie in c), $W = \mathbb{Z}_5^4$.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension der $\mathbb{R}$-Vektorräume $U_1, U_2, U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2$.

a) $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$, Untervektorräume von $\mathbb{R}^4$.

b) $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, Untervektorräume von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

c) $U_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$ und $U_2 = \langle v_3, v_1 + v_2 \rangle$, wobei $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ und linear unabhänigig.

Aufgabe 4 Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Quotientenraums V/W.

a) $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

b) $V = \mathbb{Z}_5^4$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Aufgabe 5 [schriftlich für Student_innen mit Matrikelnummer M, sodass $M \sim_3 0$ gilt]
Seien U_1, U_2, W Unterräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $U_1 + W = U_2 + W \Rightarrow U_1 = U_2$.

b) $(V = U_1 \oplus W \wedge V = U_2 \oplus W) \Rightarrow U_1 = U_2$.

c) $U_1 \cup U_2$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $\Leftrightarrow (U_1 \subseteq U_2 \vee U_2 \subseteq U_1)$.