# Übungsblatt 7

Besprechung am **07.12.2015**

---

**Aufgabe 1** Sei $A_n \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ diejenige Matrix $((a_{i,j}))_{i,j=1}^n$, deren Einträge folgendermaßen definiert sind: $a_{i,j} = 1$, falls $i \neq j$, und $a_{i,i} = 0$ für alle $i$. Berechnen Sie $\det(A_n)$.

**Aufgabe 2** [schriftlich für Student_innen mit Matrikelnummer $M$, sodass $M \sim_3 2$ gilt]
Beweisen Sie Satz 33 aus der Vorlesung: Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann gilt:

a) $\forall\, v \in V : 0 \cdot v = 0$
b) $\forall\, v \in V : (-1) \cdot v = -v$
c) $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} : \alpha \cdot 0 = 0$
d) $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} : \forall\, v \in V : \alpha \cdot v = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee v = 0$

**Aufgabe 3** Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \right\}$
b) $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$
c) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$
d) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$
e) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{Q} \right\}$

**Aufgabe 4** Geben Sie für die folgenden Vektorräume jeweils eine Basis und die Dimension an.

a) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum
b) Wie a), aber als $\mathbb{Z}_5$-Vektorraum
c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum
d) $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum
e) $\mathbb{K}^{2\times 3}$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum
f) $\mathbb{K}[X]_{\leq 3}$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum

**Aufgabe 5** Die Tschebyschow-Polynome $T_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, sind definiert durch die lineare Rekurrenz $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ mit den Anfangswerten $T_0(x) = 1$ und $T_1(x) = x$. Bezeichne $B$ die Menge $\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ aller Tschebyschow-Polynome.

a) Zeigen Sie, dass der Grad von $T_n(x)$ genau $n$ ist.
b) Zeigen Sie, dass $B \subset \mathbb{Q}[x]$ linear unabhängig ist.
c) Zeigen Sie, dass $B$ eine Basis von $\mathbb{Q}[x]$ ist.