Übungsblatt 6

Besprechung am **30.11.2015**

Aufgabe 1 Sei $\pi = (1,3,2,5,7)(6,4,3)(2,3)$.

a) Stellen Sie π als Produkt von disjunkten Zyklen dar.

b) Stellen Sie π^{-1} als Produkt von disjunkten Zyklen dar.

c) Wie erkennt man bei einem Zyklus ganz einfach, ob er positives oder negatives Vorzeichen hat?

d) Bestimmen Sie $\operatorname{sgn}(\pi), \operatorname{sgn}(\pi^2), \operatorname{sgn}(\pi^3), \operatorname{sgn}(\pi^4), \operatorname{sgn}(\pi^{-1}), \operatorname{sgn}(\pi^{-57})$.

e) Sei $\varphi = (1,2,3,4)$. Bestimmen Sie $\varphi\pi\varphi^{-1}$.

Aufgabe 2 Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Interpretieren Sie die Zeilen von A geometrisch als Vektoren in einer Ebene und betrachten Sie das von diesen aufgespannte Parallelogramm sowie dessen Fläche. Führen Sie dann A durch elementare Zeilenumformungen in eine Diagonalmatrix über, und beachten Sie dabei in jedem Schritt, wie das durch die neuen Zeilen aufgespannte Parallelogramm mit dem vorigen zusammenhängt und wie sich dies auf dessen Fläche auswirkt. Wie groß ist das ursprüngliche Parallelogramm?
Was bedeuten Zeilenvertauschungen in diesem Zusammenhang?
Was passiert beim Vervielfachen einer Zeile?
Was würde es bedeuten, wenn die Zeilen von A linear abhängig wären?

Aufgabe 3 [schriftlich für Student_innen mit Matrikelnummer M, sodass $M \sim_3 1$ gilt]
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie

a) Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\det(\lambda A) = \lambda^n A$.

b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\det(A^k) = \det(A)^k$.

c) Falls A invertierbar ist und $A^{-1} = A^\top$, dann gilt $\det A = 1 \vee \det A = -1$.

d) Wenn es $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $A^k = 0$, dann ist $\det(A) = 0$.

Achten Sie stets auf genaue Begründungen.

Aufgabe 4 Für welche Werte von x sind die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig?

a) $(x-1,1,1)$, $(0,x-4,1)$, $(0,0,x-2)$

b) $(1,x,x)$, $(x,1,x)$, $(x,x,1)$

c) $(1,1,1,1)$, $(x+1,x+2,x+3,x+4)$, $((x+1)^2,(x+2)^2,(x+3)^2,(x+4)^2)$,
$((x+1)^3,(x+2)^3,(x+3)^3,(x+4)^3)$

Aufgabe 5 Beweisen Sie Satz 32 aus der Vorlesung: Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $v, w, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt

$$\det(v, v_2, \ldots, v_n) + \det(w, v_2, \ldots, v_n) = \det(v + w, v_2, \ldots, v_n).$$