Übungsblatt 5

Besprechung am **23.11.2015**

Aufgabe 1 [schriftlich für Student_innen, deren Matrikelnummer durch 3 teilbar ist]
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \geq 1$, $m \geq 1$. Zeigen Sie:

a) In $\mathbb{K}^{n\times n}$ sind alle Elementarmatrizen invertierbar.

b) Die Äquivalenz von Matrizen, d.h. die Relation $\leftrightarrow$ auf $\mathbb{K}^{n\times m}$ aus Definition 24, ist eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 2 Über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \\ 10 & 20 & 21 & 72 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A' = \begin{pmatrix} -7 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie eine Treppenform und die Treppennormalform von A.

b) Berechnen Sie eine explizite Darstellung von $\ker A$.

c) Sind die Spalten von A linear unabhängig? Sind die Zeilen von A linear unabhängig?

d) Welchen Rang hat A?

Beantworten Sie (a)–(d) auch für die Matrix A' anstelle von A.

Aufgabe 3 Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ und seien $A \in \mathbb{K}^{3\times 4}$, $b \in \mathbb{K}^3$, $b' \in \mathbb{K}^3$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie $\{x \in \mathbb{K}^4 \ : \ A \cdot x = 0\}$ und $\{x \in \mathbb{K}^4 \ : \ A \cdot x = b\}$ explizit.

b) Ist der Vektor b eine Linearkombination der Spalten von A?

Beantworten Sie (a) und (b) auch für den Vektor b' anstelle von b.

Aufgabe 4 Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_5)^{2\times 2}$.

a) Berechnen Sie A^{-1}.

b) Zerlegen Sie A^{-1} und A in Produkte von Elementarmatrizen. Sind diese Zerlegungen eindeutig?

bitte wenden!

Aufgabe 5 a) Sei $n, p, q, m \geq 1$. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times p}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times q}$, $C \in \mathbb{K}^{p\times m}$, $D \in \mathbb{K}^{q\times m}$. Zeigen Sie

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = A \cdot C + B \cdot D$$

wobei $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times(p+q)}$ jene Matrix bezeichnet, deren erste p Spalten mit den Spalten von A und deren letzte q Spalten mit den Spalten von B übereinstimmen. Ähnlich dazu bezeichnet $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(p+q)\times m}$ jene Matrix, deren oberen p Zeilen aus C und deren untere q Zeilen aus D stammen.

b) Sei $n \geq 1$, $q \geq 0$, $B \in \mathbb{K}^{n\times q}$. Man zeige: Jede Spalte $x \in \mathbb{K}^{n+p}$ der Matrix $\begin{pmatrix} B \\ -I_q \end{pmatrix}$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} I_n & B \end{pmatrix} \cdot x = 0.$$

Die Rechenaufgaben sind mit den Algorithmen der Vorlesung zu rechnen. In Aufgabe 3 und Aufgabe 4 wird für die Elemente $[0]_{\sim_5}$, $[1]_{\sim_5}$, $[2]_{\sim_5}$, $[3]_{\sim_5}$, $[4]_{\sim_5}$ des Restklassenringes $\mathbb{Z}_5$ einfach $0, 1, 2, 3, 4$ geschrieben. Es gilt in $\mathbb{Z}_5$ etwa $2 \cdot 3 = 1$. Der Ring $\mathbb{Z}_5$ ist ein Körper.