# Übungsblatt 4

Besprechung am **16.11.2015**

---

**Aufgabe 1** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, seien $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und seien $v, w \in \mathbb{K}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

a) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$

b) $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$

c) $1 \cdot v = v$, $(-1) \cdot v = -v$

**Aufgabe 2** Sei $G$ die Gruppe $\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0\}$ mit der üblichen Matrixmultiplikation, und sei $K$ die Teilmenge $\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ von $G$. Sei weiters $\phi : G \to (\mathbb{R}, +)$, $\phi(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}) = \frac{b}{a}$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass $G$ kommutativ ist.

b) Beweisen Sie, dass $K$ eine Untergruppe von $G$ ist.

c) Zeigen Sie, dass $\phi$ ein Homomorphismus ist.

d) Beweisen Sie, dass die Faktorgruppe $G/K$ isomorph zu $(\mathbb{R}, +)$ ist.

**Aufgabe 3** Sei $S$ eine Teilmenge einer Gruppe $G$. Die *von $S$ erzeugte Untergruppe* $\langle S \rangle$ ist definiert als die kleinste Untergruppe von $G$, die $S$ enthält. Berechnen Sie die von den folgenden Mengen erzeugten Untergruppen von $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Welche der drei Gruppen sind zueinander isomorph?

$$S_1 = \{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}, \qquad S_2 = \{\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\}, \qquad S_3 = \{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}.$$

**Aufgabe 4** Gegeben seien folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Transponieren Sie $A$ und $B$.

b) Berechnen Sie $A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $B \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) Geben Sie die Lösungsmenge von $Ax = 0$ und $Bx = 0$ an.

**Aufgabe 5** [schriftlich für Student_innen mit Matrikelnummer $M$, sodass $M \sim_3 2$ gilt] Seien $R_1$, $R_2$ Ringe. Das *direkte Produkt* von $R_1$ und $R_2$ ist der Ring $R_1 \times R_2$ mit Addition $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ und Multiplikation $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) := (a_1 b_1, a_2 b_2)$ für $a_1, b_1 \in R_1$ und $a_2, b_2 \in R_2$.

a) Beweisen Sie, dass $R_1 \times R_2$ ein Ring ist.

b) Beweisen Sie, dass $R_1 \times R_2$ genau dann kommutativ ist, wenn $R_1$ und $R_2$ kommutativ sind.