Übungsblatt 3

Besprechung am **9.11.2015**

Aufgabe 1 [schriftlich für Studierende mit Matrikelnummer M, sodass $M \sim_3 1$ gilt]

Es seien A, B, V, W Mengen. Es sei $f : A \to B$ eine Funktion. Man beweise oder widerlege die folgenden Behauptungen.

a) $f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$.

b) $f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$.

c) $f^{-1}(V \setminus W) = f^{-1}(V) \setminus f^{-1}(W)$.

In der Vorlesung wurde das Urbild $f^{-1}(V)$ nur für $V \subseteq f(A)$ definiert. Allgemeiner verwendet man diese Bezeichnung auch für beliebige Mengen, die nicht notwendigerweise Teilmengen von $f(A)$ sein müssen.

Aufgabe 2 Es sei $(A, \circ)$ ein Monoid mit neutralem Element $e \in A$. Wenn $a, b \in A$ und $a \circ b = e$ gilt, dann sagen wir a ist *linksinverses Element* von b und b ist *rechtsinverses Element* von a.

a) Man zeige: wenn $a \in A$ ein linksinverses und ein rechtsinverses Element besitzt, dann ist a invertierbar.

b) Man gebe ein Monoid A und ein Element a an, sodass a ein linksinverses Element besitzt, aber nicht invertierbar ist.

Aufgabe 3 Es sei $(A, \circ)$ eine Gruppe. Die Verknüpfung $\bullet : A \times A \to A$ sei durch $a \bullet b := b \circ a$ definiert.

a) Man zeige, dass $(A, \bullet)$ eine Gruppe ist.

b) Man zeige, dass $(A, \bullet)$ isomorph zu $(A, \circ)$ ist.

c) Gelten die Behauptungen (a) und (b) auch noch, wenn das Wort "Gruppe" durch das Wort "Monoid" ersetzt wird? (ohne Beweise, Raten ist hier erlaubt)

Aufgabe 4 Es sei $G_1 := (\mathbb{R}, +)$, $G_2 := (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, und $G_3 := (\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, \cdot)$.

a) Man zeige, dass G_1 und G_3 isomorph zueinander sind.

b) Man zeige, dass G_2 und G_3 nicht isomorph zueinander sind.

c) Man zeige, dass G_1 und G_2 nicht isomorph zueinander sind.

Aufgabe 5 Es sei $V := \{+, -, 0\}$. Die Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ auf V sind durch folgende Verknüpfungstabellen definiert.

$\oplus$	+	-	0
+	+	0	+
-	0	-	-
0	+	-	0

$\odot$	+	-	0
+	+	-	0
-	-	+	0
0	0	0	0

Ist die Funktion signum : $\mathbb{R} \to V$, die jeder reellen Zahl ihr Vorzeichen zuordnet, ein Homomorphismus der Ringe $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(V, \oplus, \odot)$ (d.h. ein Homomorphismus für beide Verknüpfungen)? Ist $(V, \oplus, \odot)$ überhaupt ein Ring?