Übungsblatt 11

Besprechung am **25.01.2016**

Aufgabe 1 Sei V der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ und $f : V \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x + y, y + z)$.

a) Berechnen Sie $\ker(f)$ und $\operatorname{im}(f)$.

b) Zeigen oder widerlegen Sie: In $V/\ker(f)$ gilt $[(0, 0, -2)]_\sim + [(0, 2, 10)]_\sim = 2 \cdot [(1, 2, 3)]_\sim$.

c) Sind in $V/\ker(f)$ die Vektoren $[(0, 1, 5)]_\sim$ und $[(0, 0, 1)]_\sim$ linear unabhängig zueinander?

d) Geben Sie eine Basis des Quotientenraumes $V/\ker(f)$ explizit an.

e) Geben Sie einen Isomorphismus von $V/\ker(f)$ nach $\operatorname{im}(f)$ explizit an.

Aufgabe 2 Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Man zeige:

a) Für jedes $v \in V$ mit $v \neq 0$ existiert ein Funktional $x^* \in V^*$ mit $x^*(v) \neq 0$.
Hinweis: $\{v\}$ lässt sich zu einer Basis von V ergänzen.

b) Seien v_1, v_2 aus V. Gilt $x^*(v_1) = x^*(v_2)$ für alle $x^* \in V^*$, dann folgt $v_1 = v_2$.

Aufgabe 3 Im $\mathbb{C}$-Vektorraum V aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ spannen die vier Funktionen $b_1 = \sin$, $b_2 = \cos$, $c_1 = x \mapsto e^{ix}$ und $c_2 = x \mapsto e^{-ix}$ einen Unterraum W auf.

a) Zeigen Sie: $B = (b_1, b_2)$ und $C = (c_1, c_2)$ sind Basen von W.

b) Berechnen Sie die Basistransformationsmatrizen $T_{B\to C}$ und $T_{C\to B}$.

c) Berechnen Sie die Abbildungsmatrizen der Ableitung $d : W \mapsto W$ sowohl bezüglich B als auch bezüglich C.

d) Berechnen Sie $W/\ker(d)$, $\operatorname{im}(d)$, $\det(d)$ und $\operatorname{Rang}(d)$.

Hinweise: $d(\sin) = \cos$, $d(\cos) = -\sin$, $d(x \mapsto e^{ix}) = x \mapsto ie^{ix}$, $d(x \mapsto e^{-ix}) = x \mapsto -ie^{ix}$; $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$.

Aufgabe 4 Die Folge

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \quad \begin{array}{c|cccccccc} n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ \hline a(n) & 0 & 1 & 3 & 8 & 21 & 55 & 144 & \dots \end{array}$$

erfüllt eine lineare Rekurrenz zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

a) Berechnen Sie eine lineare Rekurrenz mit konstanten Koeffizienten der Ordnung 2 für a.

b) Wie lautet der nächste Folgeterm $a(7)$?

c) Berechnen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$, die

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \begin{pmatrix} a(n+1) \\ a(n+2) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a(n) \\ a(n+1) \end{pmatrix}$$

erfüllt.

d) Zeigen Sie für die Matrix A aus Teil (c) die Gleichung

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \begin{pmatrix} a(n) \\ a(n+1) \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} a(0) \\ a(1) \end{pmatrix}$$

durch vollständige Induktion nach n.

Aufgabe 5 Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Man zeige: Die Abbildung

$$\cdot^\top : \operatorname{Hom}(V, W) \to \operatorname{Hom}(W^*, V^*), \quad h \mapsto h^\top$$

ist linear.