Übungsblatt 10

Besprechung am **18.01.2016**

Aufgabe 1 Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Sei $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Zeigen Sie, dass B eine Basis von V ist.

b) Sei $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Koordinatendarstellung von v bezüglich der Standardbasis. Was ist die Koordinatendarstellung von v bezüglich B?

c) Sei $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Koordinatendarstellung von w bezüglich B. Was ist die Koordinatendarstellung von w bezüglich der Standardbasis?

Aufgabe 2 Seien $V = \mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ und $W = \mathbb{Q}[x]_{\leq 2}$ $\mathbb{Q}$-Vektorräume. Sei $\frac{d}{dx} : V \to W$ die Ableitungsfunktion für Polynome, die wie im Skriptum auf Seite 106 termweise definiert ist.

a) Zeigen Sie, dass $\frac{d}{dx}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\frac{d}{dx}$ bezüglich der Basen $B_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ und $B_2 = \{1, x, x^2\}$.

c) Sei $\tilde{B_1} = \{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $T_{B_1 \to \tilde{B_1}}$.

d) Sei $\tilde{B_2} = \{1, x, x(x-1)\}$. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $T_{B_2 \to \tilde{B_2}}$.

e) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\frac{d}{dx}$ bezüglich $\tilde{B_1}$ and $\tilde{B_2}$.

Aufgabe 3 Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Seien $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ und $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Basen für V.

a) Seien $h, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mit $h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto -3x+2y$ und $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 2x-y$ lineare Abbildungen. Zeigen oder wiederlegen Sie, dass die Basis $\tilde{B} = \{h, g\}$ dual zu B ist.

b) Bestimmen Sie die duale Basis C^* von C.

Aufgabe 4 [schriftlich für Studierende mit Matrikelnummer M, sodass $M \sim_3 2$ gilt] Seien V, W endliche $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\dim V = \dim W = n$. Beweisen Sie, dass V und W zueinander isomorph sind.

Aufgabe 5 Sei V ein endlicher $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\dim V = n$. Das *orthogonale Komplement* von einem Unterraum Y von V ist der Vektorraum $Y^\perp := \{h \in V^* : Y \subset \ker(h)\}$. Seien $U, W \subset V$ Unterräume von V. Zeigen Sie, dass:

a) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

b) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$