Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!): | | | | | | | |

Aufgabe 1 Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ und $h\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$, $h(x) = Ax$. Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{im} h$.

Lösung. Es gilt $\operatorname{im} h = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \rangle$. Eine Basis findet man durch Berechnen einer Treppenform der Matrix, deren Zeilen die Erzeuger sind.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2 \quad -3 \\ + \\ \qquad\quad + \end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2 \mid :(-3) \\ + \end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \}$ eine Basis von $\operatorname{im} h$.

Aufgabe 2 Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $h\colon V \to W$ ein injektiver Homomorphismus. Zeigen Sie: Wenn $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq V$ linear unabhängig ist, dann ist auch $\{h(b_1), \ldots, h(b_n)\} \subseteq W$ linear unabhängig.

Lösung: Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ so, dass $\alpha_1 h(b_1) + \cdots + \alpha_n h(b_n) = 0$. Zu zeigen: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Da h ein Homomorphismus ist, gilt $h(\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n) = 0$, also $\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n \in \ker h$. Da h injektiv ist, gilt $\ker h = \{0\}$, also $\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n = 0$. Da $\{b_1, \ldots, b_n\}$ nach Voraussetzung linear unabhängig ist, folgt $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, wie gefordert.