Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!): | | | | | | | |

Aufgabe 1 Seien $V = \mathbb{Q}^5$ und $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ Unterräume von V.

a) Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

Lösung.

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} -2 \\ \mid \cdot (-1) \\ \leftarrow + \\ \\ \leftarrow + \end{array}
\leftrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ 2 \quad -1 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \\ \end{array}
$$

$$
\leftrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \mid : (-4) \quad -1 \quad -2 \quad -1 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}
\leftrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \leftarrow + \\ -1 \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\leftrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Der Lösungsraum der Matrix lautet $\langle(-1, 1, 1, -1)\rangle$.

Es folgt, dass $\left\{(-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$ ist.

b) Geben Sie eine Basis für einen Komplementärraum von $U_1 \cap U_2$ an.

Lösung. Zum Beispiel $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.