Lineare Algebra und Analytische Geometrie I · Winter 2015/16 · **Mini-Test 6** 30.11.2015

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!):

Aufgabe 1 Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Vektoren linear abhängig sind:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir betrachten die Determinante $\det(v_1, v_2, v_3)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 0 & -3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \alpha & -3 \end{vmatrix} = \alpha(-3 - 3\alpha) = -3\alpha(\alpha + 1).$$

Die Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn die Determinante Null ist, und das ist offenbar genau dann der Fall, wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = -1$ ist.

Aufgabe 2 Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v \in V$. Zeigen Sie: $U := \{\, \alpha v : \alpha \in \mathbb{K} \,\}$ ist ein Unterraum von V.

Lösung. $U \neq \emptyset$, weil zumindest $0 = 0v \in U$ ist.

Sind $u_1, u_2 \in U$, so gibt es $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ mit $u_1 = \alpha_1 v$ und $u_2 = \alpha_2 v$. Dann gilt $u_1 + u_2 = \alpha_1 v + \alpha_2 v = (\alpha_1 + \alpha_2)v$, und da $\alpha_1 + \alpha_2 \in \mathbb{K}$ ist, folgt $u_1 + u_2 \in U$.

Ist $u \in U$ und $\beta \in \mathbb{K}$, so gilt $u = \alpha v$ für ein $\alpha \in \mathbb{K}$, und $\beta u = \beta(\alpha v) = (\beta\alpha)v \in U$, da $\beta\alpha \in \mathbb{K}$.

Damit ist U ein Unterraum von V.