Lineare Algebra und Analytische Geometrie I · Winter 2015/16 · **Mini-Test 5** 23.11.2015

Name (deutlich lesbar!): .....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!): | | | | | | | |

Zur Erinnerung: Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{K}^n$ heißen *linear abhängig,* falls es $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ gibt mit $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$ und $\alpha_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, k\}$.

Aufgabe 1 Untersuchen Sie durch Lösen eines geeigneten linearen Gleichungssytems, ob folgende Vektoren linear abhängig sind:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ + \\ + \end{matrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ \\ + \end{matrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ -3 \\ \\ \\ \end{matrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $\ker \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{Q} \right\}$.

Insbesondere gilt $-3v_1 + v_2 - v_3 = 0$, und damit sind v_1, v_2, v_3 linear abhängig.

Aufgabe 2 Seien $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{K}^n$. Zeigen Sie: Wenn v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind, dann sind auch v_1, v_2, v_3, v_4 linear abhängig.

Lösung. Wenn v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind, dann gibt es $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{K}$, von denen mindestens eins von Null verschieden ist und für die gilt $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$. Dann gilt auch $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + 0 v_4 = 0$. Das ist dann eine lineare Abhängigkeit zwischen v_1, v_2, v_3, v_4.