Lineare Algebra und Analytische Geometrie I · Winter 2015/16 · **Mini-Test 4** 16.11.2015

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!): | | | | | | | |

Aufgabe 1 a) Bestimmen Sie den Kern der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 4}.$$

Dokumentieren Sie dabei nachvollziehbar, welche Zeilenoperationen Sie durchführen.

b) Begründen Sie ohne eine weitere Rechnung, dass es ein $x \in \mathbb{Q}^3 \setminus \{0\}$ mit $A^\top x = 0$ gibt.

Lösung a) Treppennormalformberechnung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Auffüllen mit $-e_i$-Zeilen und Streichen von Nullzeilen liefert $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$.

Ablesen der Lösungsmenge: $\ker A = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \right\}$.

b) Nach der vorherigen Rechnung gilt $\operatorname{Rang} A = 2$. Nach Satz der Vorlesung gilt deshalb auch $\operatorname{Rang} A^\top = 2$. Da $A^\top$ drei Spalten und die TNF von $A^\top$ nur zwei Treppenstufen hat, muss das Gleichungssytem $A^\top x = 0$ eine von Null verschiedene Lösung haben.