Lineare Algebra und Analytische Geometrie I · Winter 2015/16 · **Mini-Test 10** 18.01.2016

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!):

Aufgabe 1 Sei $V = \mathbb{Q}[X]_{\leq 3}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens 3. Für $x \in \mathbb{Q}$ und $p = p_0 + p_1 X + p_2 X^2 + p_3 X^3 \in \mathbb{Q}[X]$ sei $\mathrm{eval}_x(p) \in \mathbb{Q}$ der Wert

$$\mathrm{eval}_x(p) := p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 \in \mathbb{Q}$$

der zu p gehörigen Polynomfunktion. Betrachte die lineare Abbildung $h\colon V \to \mathbb{Q}^4$ mit $h(p) = \big(\mathrm{eval}_1(p), \mathrm{eval}_{-1}(p), \mathrm{eval}_2(p), \mathrm{eval}_3(p)\big)$. Wie lautet die Abbildungsmatrix von h bezüglich der Basen $\{1, X, X^2, X^3\}$ und $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$?

Lösung. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 U, V, W seien $\mathbb{K}$-Vektorräume und $h\colon U \to V$ sei eine lineare Abbildung. Weiter sei $H\colon \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(U, W)$ definiert durch $H(f) = f \circ h$. Zeigen Sie: H ist linear.

Lösung. Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ und $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Für jedes $x \in U$ gilt dann $H(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x) = ((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \circ h)(x) = \alpha_1 f_1(h(x)) + \alpha_2 f_2(h(x)) = (\alpha_1 H(f_1) + \alpha_2 H(f_2))(x)$. Da x beliebig war, folgt $H(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 H(f_1) + \alpha_2 H(f_2)$, wie gefordert.