Übungsblatt 9

Besprechung am **29. Mai 2017**

Aufgabe 1 (Torsionsmoduln) Sei R ein Integritätsbereich, sei M ein R-Modul, und seien U, V, W Untermoduln von M. Zeigen Sie:

a) Wenn M/U und M/V Torsionsmoduln sind, so ist auch $M/(U \cap V)$ ein Torsionsmodul.

b) $U + V$ ist genau dann ein Torsionsmodul, wenn U und V beide Torsionsmoduln sind.

c) Wenn $U \subseteq W$, so gilt $(U + V) \cap W = U + (V \cap W)$.

Aufgabe 2 (Einfache Moduln) Sei R ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring (mit Einselement), und sei M ein R-Modul mit $M \neq \{0\}$, der außer $\{0\}$ und M keine weiteren Untermoduln besitzt.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $a \in M \setminus \{0\}$ gilt: $\{ra \mid r \in R\} = M$.

b) Zeigen Sie, dass jeder Homomorphismus δ von M nach M entweder $\delta(x) = 0$ für alle $x \in M$ erfüllt, oder aber bijektiv ist. *Hinweis:* Betrachten Sie den Kern und das Bild von δ. Da beide Untermoduln sind, bleiben wenige Möglichkeiten übrig. (Die in diesem Beispiel gezeigte Eigenschaft heißt *Lemma von Schur.*)

Aufgabe 3 (Gitter) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

a) $\langle \binom{a}{b}, \binom{c}{d} \rangle = \mathbb{Z}^2$.

b) $\det(\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)) \in \{-1, +1\}$.

c) Die Vektoren $\binom{a}{b}$ und $\binom{c}{d}$ sind linear unabhängig, und es gibt im Parallelogramm mit den Eckpunkten $\binom{0}{0}, \binom{a}{b}, \binom{c}{d}, \binom{a+c}{b+d}$ im $\mathbb{R}^2$ außer den vier Eckpunkten keinen Punkt, dessen x-Koordinate und y-Koordinate beide ganzzahlig sind. Anders ausgedrückt,

$$\{\lambda \binom{a}{b} + \mu \binom{c}{d} \mid \lambda, \mu \in [0, 1]\} \cap \mathbb{Z}^2 = \{\binom{0}{0}, \binom{a}{b}, \binom{c}{d}, \binom{a+c}{b+d}\}.$$

Aufgabe 4 (Hermite-Normalform) Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 \\ 12 & 26 & 27 \end{pmatrix}$.

a) Finden Sie eine Basis des $\mathbb{Z}$-Moduls, der von den Spalten von A erzeugt wird.

b) Finden Sie eine Basis von $\ker_{\mathbb{Z}} A$.

c) Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $C \in \mathbb{Z}^{n \times 2}$, sodass der von den Spalten von A erzeugte $\mathbb{Z}$-Modul gleich $\ker_{\mathbb{Z}} C$ ist?

Aufgabe 5 (Diese Aufgabe ist schriftlich auszuarbeiten.) (Smith-Normalform)

Sei $A = \begin{pmatrix} 42 & -24 \\ -108 & 60 \\ -558 & 312 \end{pmatrix}$, und sei $S(A)$ der von den Spalten von A erzeugte $\mathbb{Z}$-Untermodul. Geben Sie einen Isomorphismus des Moduls $\mathbb{Z}^3/S(A)$ in einen Modul der Form $\mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k} \times \mathbb{Z}^l$ an! Verwenden Sie dazu, dass A die Smith-Normalform D in folgender Form besitzt:

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = UAV = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Sie können etwa so vorgehen:

a) Zeigen Sie, dass $S(D) = S(UA)$.

b) Bestimmen Sie den Kern von $\phi : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3/S(UA)$, $\phi(x) = [Ux]_{\sim_{S(UA)}}$.

c) Warum gilt daher, dass $\mathbb{Z}^3/S(A)$ und $\mathbb{Z}^3/S(UA)$ isomorph sind? Mit welchem Isomorphismus?

d) Wie können Sie $\mathbb{Z}^3/S(D)$ einfacher beschreiben?

Benutzen Sie nun den Isomorphismus, um ein Element $v \in \mathbb{Z}^3/S(A)$ anzugeben, das $6v = [0]_{\sim_{S(A)}}$ und $v \neq [0]_{\sim_{S(A)}}$ erfüllt.