Übungsblatt 6

Besprechung am **8. Mai 2017**

Besonderer Hinweis für alle Aufgaben: Es ist erlaubt und auch empfohlen, für langwierige Rechnungen, die nicht Inhalt der aktuellen Lehrveranstaltung sind, mit geeigneter Software zu arbeiten, also insbesondere für grundlegende Matrizenoperationen (Inhalt von Lineare Algebra 1) und zur Evaluierung der Integrale (Inhalt von Analysis).

Aufgabe 1 Sei U der Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ mit Standardskalarprodukt, der von $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$ und $(0, 0, 1, 1)$ aufgespannt wird.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U;

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Vektoren $v_1 := (2, 1, -2, -1)$ und $v_2 := (-1, 1, -1, -3)$ bezüglich dieser Orthonormalbasis, und berechnen Sie $\|v_1\|$ und $\langle v_1 \mid v_2 \rangle$ mit Hilfe dieser Koordinaten.

c) Welcher Vektor $u \in U$ liegt am nächsten bei $(0, 1, 0, 0)$?

d) Wie weit ist $(0, 1, 0, 0)$ von U entfernt?

e) Betrachten Sie nun den Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle p \mid q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)q(x)e^{-x^2}\,dx.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $1, X, X^2, X^3$ erzeugten Unterraums. Bestimmen Sie das Skalarprodukt von $X + 2$ und X^2 sowohl direkt als auch über die Koordinaten bezüglich dieser Orthonormalbasis.

Aufgabe 2 Für jede der Matrizen A sei $h : V \to V$ die durch $h(x) = Ax$ definierte lineare Abbildung für einen geeigneten Vektorraum V. Finden Sie, falls möglich, eine Orthonormalbasis von V bestehend aus Eigenvektoren von h sowie eine Matrix P und eine Diagonalmatrix D, sodass $P^\top AP = D$.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 Sei V der Vektorraum aller Polynome über $\mathbb{R}$ höchstens zweiten Grades, mit dem Skalarprodukt

$$\langle\, p \mid q \,\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx.$$

a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $e : V \to \mathbb{R}$ definiert durch $e(p) := p(\alpha)$.

b) Sei $e : V \to \mathbb{R}$ definiert durch $e(p) := \int_{-1}^{1} p(x)\,dx$.

Zeigen Sie in beiden Fällen, dass $e \in V^*$, und finden Sie ein Polynom r, sodass $e(p) = \langle\, p \mid r \,\rangle$.

Vergessen Sie nicht, das Ergebnis zu überprüfen.

Aufgabe 4 Sei V wie in der vorigen Aufgabe. Wir betrachten die Abbildung $d : V \to V$ definiert durch die Ableitung:

$$d(p) := p'.$$

Bestimmen Sie die dazu adjungierte Abbildung d^*. Worauf bildet diese ein Polynom der Form $a + bX + cX^2$ ab?

Vergessen Sie nicht, das Ergebnis zu überprüfen.

Aufgabe 5
Diese Aufgabe ist schriftlich auszuarbeiten.

a) Zeigen Sie Satz 103.3: Existiert die adjungierte Abbildung f^* einer linearen Abbildung f, dann existiert auch die adjungierte Abbildung von f^* und es gilt: $(f^*)^* = f$.

b) Seien f und g Endomorphismen eines Vektorraums V, und B eine Basis aus Eigenvektoren sowohl von f als auch von g. Zeigen Sie, dass f und g vertauschbar sind, d.h., es gilt $f \circ g = g \circ f$.