Übungsblatt 5

Besprechung am **24. April 2017**

Aufgabe 1 (Jordansche Normalform) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_{n+3} = 6x_{n+2} - 12x_{n+1} + 8x_n$ für $n \geq 1$. Für $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{pmatrix}$ gilt also also $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie eine Matrix J in Jordanscher Normalform und eine Matrix B, sodass $B^{-1}AB = J$.

b) Bestimmen Sie einen Ausdruck für J^n.

c) Bestimmen Sie daraus einen Ausdruck für A^n.

d) Bestimmen Sie einen Ausdruck für den ersten Eintrag von $A^{m-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also für x_m.

Aufgabe 2 (Polynome und Matrizen)

a) Sei $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$, und seien $p, q \in \mathbb{Q}[X]$ so, dass $(pq)(A) = 0$ und $\gcd(p, q) = 1$. Zeigen Sie, dass der Spaltenraum der Matrix $p(A)$ gleich dem Nullraum der Matrix $q(A)$ ist; zeigen Sie also $\operatorname{im}(p(A)) = \ker(q(A))$.

b) Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{Q}$ mit $A \cdot A = A$. Zeigen Sie: $\mathbb{Q}^n$ ist die direkte Summe $\ker(A) + \operatorname{im}(A)$, und A ist diagonalisierbar.

Aufgabe 3 (Orthogonalprojektion)

a) Seien a, b Vektoren in einem Skalarproduktraum mit $b \neq 0$. Zeigen Sie, dass $a - \frac{\langle a,b\rangle}{||b||^2} b$ der einzige Vektor in $a + \operatorname{span}(b)$ ist, der auf b normal steht.

b) Sei T ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$, sei $v \in \mathbb{R}^n$, und sei B eine Matrix, in deren Spalten eine Basis von T steht.

   i) Zeigen Sie, dass $B^\top B$ invertierbar ist. *Hinweis:* Sie könnten etwa beweisen, dass $(B^\top B)x = 0$ nur die Lösung $x = 0$ hat, indem Sie $\langle Bx \mid Bx\rangle$ untersuchen.

   ii) Zeigen Sie, dass $p = B(B^\top B)^{-1}B^\top v$ der einzige Vektor ist, der $p \in T$ und $v - p$ in $T^\perp$ erfüllt.

Aufgabe 4 (Positiv definite Matrizen)

a) Welche Diagonalmatrizen im $\mathbb{R}^{n\times n}$ sind positiv definit?

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische positiv definite Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie, dass es eine invertierbare Matrix P und eine Diagonalmatrix D gibt, sodass $A = PDP^{-1}$ und $P^\top = P^{-1}$ gilt, und außerdem alle Diagonaleinträge von D positiv sind. *Hinweis:* Was heißt $P^\top P = I_n$ für die Spaltenvektoren von P?

c) Finden Sie eine solche Zerlegung für $A = \begin{pmatrix} 84 & -12 \\ -12 & 91 \end{pmatrix}$.

d) Finden Sie eine solche Zerlegung für $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Benützen Sie diese Zerlegung, um B in der Form $B = C^\top C$ mit $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zu schreiben. *Hinweis:* Die Matrix B hat nicht drei verschiedene Eigenwerte, daher brauchen Sie eine zusätzliche Überlegung gegenüber (b). Sie müssen jetzt Eigenvektoren zum Eigenwert 6 finden, die aufeinander senkrecht stehen.

Aufgabe 5 (Orthogonales Komplement) Sei V ein Skalarproduktraum, sei M eine Teilmenge von V, und sei H die lineare Hülle von M. Zeigen Sie:

a) $M^\perp = H^\perp$.

b) $M \subseteq (M^\perp)^\perp$.

c) $M^\perp = ((M^\perp)^\perp)^\perp$.

d) Wenn V der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem Skalarprodukt $\langle v \mid w \rangle := \sum_{i=1}^n v_i w_i$ ist, so gilt $H = (M^\perp)^\perp$.

e) Im Vektorraum $C([-1,1], \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x)\, dx$ muss $(M^\perp)^\perp \subseteq H$ nicht gelten. *Hinweis:* Wählen Sie als M und als H die Menge aller in $[-1,1]$ differenzierbaren Funktionen, und überlegen Sie, warum $H^\perp = 0$.