# Übungsblatt 2

Besprechung am **20. März 2017**

---

**Aufgabe 1** Gegeben seien die Polynome $f = X^3 + 1$, $g = X^3 + X + 1$ und $h = X^3 + X^2 + 1$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_2$.

a) Betrachten Sie die Ringe $\mathbb{Z}_2[X]/(f\mathbb{Z}_2[X])$, $\mathbb{Z}_2[X]/(g\mathbb{Z}_2[X])$, $\mathbb{Z}_2[X]/(h\mathbb{Z}_2[X])$. In welchen davon sind $[X]$ und $[X + 1]$ invertierbar?

b) Betrachten Sie diese Ringe als Vektorräume über $\mathbb{Z}_2$ und finden Sie jeweils eine Basis. Wieviele Elemente haben daher diese Ringe?

c) Welche dieser Ringe sind Körper?

d) Betrachten Sie $g$ als Polynom über $\mathbb{Z}_2[X]/(g\mathbb{Z}_2[X])$ und finden Sie eine Nullstelle.

**Aufgabe 2** a) Seien

$$b_1 = (4, 1, 5) \quad b_2 = (0, 2, -1)\,, \quad b_3 = (0, 0, 1)\,.$$

Sei weiters $h$ eine lineare Abbildung, sodass

$$\begin{aligned} h(b_1) &= 2b_1 \\ h(b_2) &= -b_2 \\ h(b_3) &= -b_3 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von $h$ sowie die Abbildungsmatrix von $h$ bezüglich der Basis $(b_1, b_2, b_3)$.

b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A$ als Matrix über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$.

c) Zeigen Sie: Die Eigenwerte einer Dreicksmatrix sind genau die Einträge in deren Diagonale.

**Aufgabe 3** a) Sei $A$ eine Matrix. Zeigen Sie, dass $A$ und $A^\top$ dieselben Eigenwerte haben.

b) Haben $A$ und $A^\top$ auch dieselben Eigenvektoren?

c) Sei $A$ nilpotent (d.h., es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $A^n = 0$). Zeigen Sie, dass 0 der einzige Eigenwert von $h$ ist.

d) Sei für eine lineare Abbildung $v_1 \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1$ und $v_2 \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2$. Zeigen Sie: Wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist, dann sind $v_1$ und $v_2$ linear unabhängig.

**Aufgabe 4** Wir betrachten den Vektorraum $V$ der stetigen Funktionen $C([0, 1], \mathbb{R})$ sowie die Abbildung $S : V \to V$ mit $S(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Zeigen Sie, dass $S$ linear ist und bestimmen Sie die Eigenwerte und -vektoren von $S$.

**Aufgabe 5** Sei $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ und $\lambda$ ein Eigenwert von $A$. Zeigen Sie: $\lambda^3 + 3\lambda + 7$ ist ein Eigenwert von $A^3 + 3A + 7I_n$.